

(علمی - پژوهشی)

شبیه‌سازی به روش شبکه بولتزمن سه بعدی از نوسانات یک قطره آونگان در حال رشد

در این مقاله، معادله نیرو-جابجایی و نوسانات سه بعدی غیر خطی یک قطره آونگان به صورت عددی بررسی می‌شود. رشد و جدایش قطره، که به دلیل گرانش از انتهای اولیه موئین آونزان است، (با فرض نسبت‌های چگالی و گرانشی بالا و جریانهای دو فازی غیرقابل اختلاط در نظر گرفته می‌شود. از روش شبکه بولتزمن با زمان آرامش سه بعدی برای شبیه‌سازی رشد، جدایش و نوسانات قطره استفاده شده. متوجه شدیم که قطره در حال رشد همزمان سه رفتار کششی مختلف را نشان می‌دهد. نشان داده شد که قطره دارای شتاب نوسانی است. حداکثر دامنه شتاب بدون بعد حدود ۳۵ و فرکانس بدون بعد حدود ۴۰ بود. نتیجه گیری شد که قطره هنگام رشد امواج صوتی را در بالادست تولید می‌کند. اگرچه جریان در جهت گرانش بود، نوسانات عرضی با دامنه کم و با فرکانس بدون بعد ۵۰۰ تا ۸۰۰ در طول رشد قطره تشخیص داده شد.

واژه‌های کلیدی: جریان دوفازی، روش شبکه بولتزمن سه بعدی، نوسانات غیر خطی قطره، قطره در حال رشد

شهرام قربانی فر^{۱*}، محمد طیبی رهنی^{۲**}
و مسعود زارع^{۱***}

۱- دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، دانش‌کده مهندسی مکانیک، تهران، ایران، کدپستی: ۱۳۹۱۸۱۴۴۵۴
۲- دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا، تهران، ایران

* دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو)، ایمیل:
sh.ghorbanifar@iau-astara.ac.ir

** استاد
*** استادیار

Three-dimensional LBM Simulation of Oscillations of a Pendent Growing Drop

In this work, the force-displacement equation and non-linear three-dimensional oscillations of a pendant drop are investigated numerically. The presented novel force-displacement function allows following the dynamics of a pendant drop and realizing its elastic behavior. The growth and detachment of drop, which is pending due to gravity from a capillary tip, is considered (assuming high density and high viscosity ratios and immiscible two-phase flows). The three-dimensional multi-relaxation time lattice Boltzmann method (MRT-LBM) was used to simulate the growth, detachment, and oscillations of the drop. It was realized that the growing drop shows three different elastic behaviors simultaneously (hardening, linear, and softening). It was shown that the growing drop has oscillatory acceleration (in the direction of flow). The acceleration had a maximum dimensionless amplitude of about 35 and a dimensionless frequency of about 40. It was concluded that drop generates acoustic waves upstream while growing. Although the flow was in the gravity direction, low amplitude transverse oscillations with the dimensionless frequency of 500 to 800 were detected during the drop growth.

Keywords: Two-phase Flow, Growing Drop, Drop Oscillations, Three-dimensional Lattice Boltzmann Method

Sh. Ghorbanifar^{1*}, M. Taeibi Rahni^{2**}
and M. Zareh^{1***}

1- Department of Mechanical Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Postal Code: 1391814454, Tehran, IRAN

2- Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, IRAN

*Ph.D. Student (Corresponding Author): Email:

sh.ghorbanifar@iau-astara.ac.ir

** Professor

***Assistant Professor

۱- فهرست علائم و اختصارات

Bo	عدد باند
Ca	عدد کیلاری
Cs	سرعت صوت در سیستم
D	قطر داخلی لوله
$e\alpha$	مجموعه سرعت ماکروسکوپی
F_a	جمله نیرو
F	نیروی خارجی وارده بر سیال
F_b	بردار نیروی حجمی
F_s	بردار نیروی کشش سطحی
$f(y)$	تابع نیرو-جابجایی قطره آونگان
G	بردار شتاب جاذبه
\bar{g}_a	تابع توزیع هیدرودینامیکی
h_a	تابع توزیع میدان فاز
M	تحرك سیستم
M	نگاشت متعامد
N_x	دقت شبکه در راستای افقی
N_y	دقت شبکه در راستای قائم
\hat{n}	بردار یکه عمود بر مرز مشترک دوفاز
\hat{n}_w	بدر یکه عمود بر دیواره
p	فشار ماکروسکوپی
R	شعاع قطره
Re	عدد رینولدز
\hat{S}	ماتریس قطری زمان آرامش
t	زمان
t^*	زمان بی‌بعد
u	بردار سرعت ماکروسکوپی
W	ضخامت مرز مشترک
$w\alpha$	ضرایب وزنی
x	بردار مکان
x_0	بردار مکان اولیه
X_c/D	مرکز جرم بی‌بعد قطره
y	متغیر مستقل
α	اندیس جهت
φ	متغیر فاز پخش
φ_w	متغیر فاز پخش در دیواره
$\Omega\alpha$	عملگر برخورد
μ	لزجت موضعی سیال
μ_φ	پتانسیل شیمیایی برای سیالات دو جزئی
ν	لزجت سینماتیک
ρ	چگالی موضعی سیال
ρ_H	چگالی فاز سنگین‌تر
ρ_L	چگالی فاز سبک‌تر
τ	زمان آرامش هیدرودینامیکی
τ_φ	زمان آرامش میدان فاز
τ_H	زمان آرامش فاز سنگین‌تر
τ_L	زمان آرامش فاز سبک‌تر
θ	زاویه تماس سیال در سطح جامد
σ	کشش سطحی

۲- مقدمه

برهم‌کنش سیال-مایع در دنیای واقعی یعنی طبیعت و صنعت، همه جا وجود دارد. بنابراین، قطره‌های منفرد اغلب برای تعیین خصوصیات سطحی سیال-مایع استفاده می‌شوند [۱]. مطالعه آنها به تحلیل سیستم‌هایی با مرز یا دینامیک مشابه کمک می‌کند. به عنوان نمونه‌ای از مورد اخیر، می‌توان به شیر آب چک‌های اشاره کرد که یک سیستم دارای نوسانات غیرخطی و حالت بی‌نظم است [۲-۳]. همچنین، قطرات آونگان نوسانی، یک سیستم مناسب برای تجزیه و تحلیل دینامیک غیر خطی تشکیل می‌دهند [۴]. رفتار الاستیک غیر خطی قطره‌های نوسانی بسیاری از محققان را متقاعد کرده است که مطالعه قطره ارتعاشی برای توصیف سیستم‌هایی با ماهیت غیرخطی و بی‌نظم مفید است.

رویکردهای تجربی، تحلیلی و عددی بسیاری وجود دارد که سعی در حل چنین مشکلی دارند. در این میان، رویکردهای عددی به طور فزاینده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بیشتر کارهای انجام شده در این زمینه با حذف اثرات دینامیکی و فرض تعادل ترمودینامیکی همراه بوده است. با این وجود، این تلاش‌ها منجر به نتایج اساسی و قابل اجرا شده است. به تازگی، علاقه اصلی محققان در این زمینه بر تأثیر متقابل تأثیرات دینامیکی غالب متمرکز شده است. علاوه بر این، مراحل در سیستم‌های سیال-مایع دارای مشخصات دینامیکی پیچیده‌ای هستند که به بررسی‌های نظری و عملی نیاز دارند. به همین دلیل بررسی شکل‌گیری قطره، نوسان و جدا شدن از نوک لوله مؤین از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

روش دینامیک سیالات محاسباتی سنتی توسط بسیاری از محققان برای بررسی رفتار قطره مورد استفاده قرار گرفته است. محققان دینامیک قطره را به عنوان یک مسئله چالش برانگیز در هیدرودینامیک در نظر می‌گیرند که بر پیچیدگی اثرات متقابل مرزهای سیال-مایع تأثیر گذاشته است. در سال ۱۹۹۷، تشکیل قطره در نوک لوله عمودی، غوطه ور شده نامحلول در یک مایع دوم، با استفاده از روش انتگرال مرزی توسط ژانگ و استون [۵] به صورت عددی مورد مطالعه قرار گرفت. آنها تأثیر برخی از اعداد بدون بعد بر رشد و جدایش قطره‌ها و اندازه ماهواره‌های جدا شده را بررسی کردند. آنها دریافتند که برای نسبت گرانروی کوچکتر از ۱۰، هیچ قطره بزرگ ماهواره‌ای تشکیل نمی‌شود. همچنین، آنها جریان یکنواخت خارجی را به سیستم اعمال و مشاهده کردند که باعث کاهش اندازه قطره می‌شود. یکی از نتایج قابل توجه آنها مربوط به تأثیر اعداد کیلاری و باند در اندازه قطره و جدایش آن است.

در سال ۱۹۹۸، یک مدل دینامیکی متقارن محوری جدید از

استفاده از آب به عنوان فاز دوم مطالعه کرد. آنها نتیجه گرفتند که افزایش سرعت جریان متقابل، اندازه قطره را کاهش می‌دهد و بالعکس. بوستویک و استین^[۱۴] مسئله خطی ارتعاشات قطره مطالعه کردند. در سال ۲۰۱۳، تشکیل قطره و جدایش آن از یک لوله موئین تحت تأثیر جاذبه به طور گسترده توسط بیربراور^۱ و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت [۱۵]. آنها با استفاده از روش اجزا محدود زمان بحرانی مورد نیاز برای جدایش قطره را مطالعه کردند. آنها دریافتند که زمان مورد نیاز برای دفع قطره با سرعت متوسط به طور نمایی کاهش می‌یابد. با این حال، عدم وجود نوسانات قطره در مطالعه آنها به چشم می‌خورد. در سال ۲۰۱۵، کرباسچی^{۱۱} و همکاران [۱۶] یک مطالعه تجربی و عددی گسترده در مورد تشکیل قطره، نوسان و جدا شدن انجام دادند. مطالعه آنها اندازه‌گیری‌های آزمایشی کشش سطحی قطره بود. با این حال، آنها هیچ نتیجه‌ای در رابطه با فرکانس طبیعی قطره گزارش نکردند. در سال ۲۰۱۶، نورانیدوست^۲ و همکاران [۱۷] اثرات ویسکوزیته مایعات بر پویایی قطره و شکل‌گیری آن را در یک جریان متقارن به صورت عددی بررسی کردند.

اخیراً طی دو دهه گذشته استفاده از روش شبکه بولتزمن برای مطالعه رفتار قطره توجه محققان را به خود جلب کرده است. با توجه به مرجع [۱۸] می‌توان گفت: «در مورد مشکلات جریان پیچیده که نتایج تحلیلی هنوز در دسترس نیست، مقدار زیادی تلاش عددی انجام شده است. علاوه بر اهمیت تسخیر صحیح تغییر شکل و حرکت مرز مشترک در سیالات دوفازی در دو دهه گذشته، رویکردهای جدید محاسباتی مانند روش هیدرودینامیک ذرات صاف و روش شبکه بولتزمن نشان داده است که بر بسیاری از موانع موجود در رویکردهای مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی غلبه کرده است. در چنین رویکردهایی، مایع به صورت فرضی به ذرات کوچک گسسته می‌شود (به جای گسسته‌سازی فضای حاوی آن ماده). سپس، با مدل‌سازی ریاضی شبیه آنچه در دینامیک مولکولی استفاده می‌شود که در آن برخورد ذرات نیز در نظر رفته می‌شوند. چنین به نظر می‌رسد که روش شبکه بولتزمن روشی سودمند می‌باشد و لذا شبیه‌سازی عددی جریان‌های چند فازی با آن بسیار محبوب شده است».

جدا شدن قطره در جوشکاری قوس فلز گاز توسط جونز^۲ و همکاران ارائه شد [۶]. آنها شبیه‌سازی عددی را با اندازه‌گیری‌های آزمایشی گسترده تصاویر جوش مقایسه کردند. آنها در مورد تغییرات کشش سطحی قطرات به نتایج ارزنده‌ای رسیدند. یک مشاهده کیفی در مورد نیروی برگشتی اعمال شده توسط قطره جدا شده به بالادست جریان انجام دادند. همچنین، این پدیده قبلاً در سال ۱۹۹۴ توسط فاینرمن و میلر^۳ [۷] هنگام اندازه‌گیری دقیق جدا شدن قطره گزارش شده بود. در سال ۲۰۰۰، لاو و مشایک^۴ [۸] با استفاده از شبیه‌سازی عددی محیط پر شده از گاز داغ، گرمایش قطره نوسانی را بررسی کردند. آنها مشاهده کردند که گردابه‌ها بارزترین ویژگی جریان‌های حرارتی-مویریگی را نشان می‌دهند. تعداد و قدرت گردابه‌ها با نحوه اختلال دما متفاوت بود. در سال ۲۰۰۳، دیویدسون و کوپر وایت^۵ [۹] از شبیه‌سازی عددی VOF برای پیش‌بینی پویایی تشکیل قطره مایع رقیق‌کننده برش در هوا از یک روزنه دایره‌ای استفاده کردند. آنها تأثیر اعداد وبر، فروود و آنسرج را بر روی شکل، جدایش و طول ضخامت قطره بررسی کردند.

کرامر^۶ در سال ۲۰۰۴ [۱۰] به طور گسترده‌ای تشکیل قطره را در یک لوله موئین و همچنین در جریان کانال بررسی کرد. او فهمید که به‌طور عمده پنج عدد مهم بدون بعد در فیزیک این مسئله وجود دارد که عبارتند از: عدد کیپلاری، عدد آنسرج، عدد رینولدز، عدد باند و عدد گرانروی. علاوه بر این، کرامر ریزش پریودیک قطره را مورد مطالعه قرار داد، که قبلاً توسط فاینرمن و میلر مورد مطالعه قرار گرفته بود [۱۱]. کرامر نتیجه گرفت که پس از جدایش قطره، مایع باقیمانده بالادست شروع به لرزش و انتقال ارتعاش به قطره تازه تشکیل شده می‌کند، که به نوبه خود بر جدا شدن آن تأثیر می‌گذارد. در سال ۲۰۰۵، فاون می^۷ و همکاران [۱۲]، با استفاده از روش حجم سیال برای مطالعه تشکیل قطره، یک شبیه‌سازی عددی را با استفاده از نرم افزار تجاری دینامیک سیالات محاسباتی انجام داد. علاوه بر این، او یک مطالعه تجربی را با مقایسه این دو نتیجه انجام داد.

تیمگرن^۸ و همکاران [۱۳]، در سال ۲۰۰۹، با استفاده از گسسته‌سازی مرتبه اول، تشکیل قطرات روغن را به صورت عددی و تجربی از یک لوله موئین منفرد با جریان متقاطع، با

2. Jones
3. Fainerman and Miller
4. Lau and Mashayek
5. Davidson and Cooper-White
6. Cramer
7. Fawehinmi
8. Timgren
9. Bostwick and Steen
10. Bierbrauer
11. Karbaschi
12. Nooranidoost

۴- مدل عددی

در دو دهه گذشته، بسیاری از تحقیقات بر روی دینامیک قطره با استفاده از روش شبکه بولتزمن انجام شده است. اخیراً، یک مدل برای جریان‌های چند فاز به نام مدل میدان فاز بقایی ایجاد شده است [۲۲-۲۵]. در این بخش، توضیح مختصری درباره روابط و معادلات هیدرودینامیکی مورد استفاده در مدل فاز بقایی ارائه شده است.

۴-۱- معادلات تسخیر مرز مشترک

دو روش شناخته شده برای استخراج روابط وجود دارد که عبارتند از: معادله کاهن-هلیارد^۴ [۳۰] و معادله آلن-کاهن^۵ [۳۱]. برای معادله کاهن-هلیارد صرف نظر از خاصیت بقای جرم باید گسسته‌سازی مشتق مرتبه چهارم انجام گیرد که توجه ویژه‌ای را می‌طلبد. در حالی که معادله آلن-کاهن فقط شامل گسسته‌سازی مشتق مرتبه دوم است. به طرز جالب توجهی، چپو و لین^۶ [۳۲] هر دو مزیت معادلات کان-هلیارد و آلن-کاهن را با هم ترکیب کردند. در مدل بقایی که توسط [۲۵] برای سیستمی حاوی سیال دوجزئی غیرقابل تراکم معرفی شده است، معادله حاکم برای تعقیب جبهه به صورت زیر [۲۳] است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left[M \left(\nabla \phi - \frac{4}{W} \phi (1-\phi) \hat{\mathbf{n}} \right) \right], \quad (1)$$

که در آن، ϕ متغیر میدان فاز مرز پخش با مقدار صفر در فاز سبک‌تر و یک در فاز سنگین‌تر، \mathbf{u} بردار سرعت ماکروسکوپی، t زمان، W ضخامت رابط، M تحرک و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه عمود بر مرز مشترک است که جهت مثبت آن به سمت فاز سنگین‌تر باشد. بنابراین داریم:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}. \quad (2)$$

همچنین، فرض می‌شود که $\phi(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

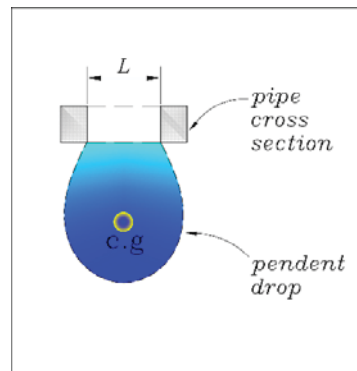
$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{W/2} \right) \right], \quad (3)$$

که در آن مشخصات میدان فاز تعادل در \mathbf{x}_0 واقع شده است و به عنوان یک شرط اولیه برای ϕ حاصل از به حداقل رساندن انرژی یک سیستم استفاده می‌شود [۳۳]. ژاکمین^{۱۷} [۳۴] برای اعمال

در سال ۲۰۰۹، فخاری و رحیمیان^{۱۳} [۱۹] از روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی قطره تحت جریان گاز استفاده کردند. آنها با استفاده از اعداد رینولدز و وبر مطالعه‌ای مفصل و گسترده انجام دادند. یک سال بعد، آنها با مطالعه کشش سطحی، اثرات بخارگاز و گرانیوی قطره، اعداد اتووس، مورتون و ارشمیدس را در سقوط آزاد یک قطره در لوله‌ای متقارن بررسی کردند [۲۰]. بعداً آنها شبیه‌سازی قطره خود را با روش شبکه بولتزمن با زمان آرامش چندگانه گسترش دادند. در سال‌های ۲۰۱۳ تا ۲۰۱۷، فخاری و همکاران [۲۲-۲۵] یک مدل مناسب برای جریان‌های چند فاز به نام مدل میدان فاز بقایی که به طور کامل دینامیک قطره را در بر می‌گیرد، ایجاد کردند. همچنین، آنها دینامیک قطره را در تماس با مرزهای جامد بررسی کردند. همچنین، شیخ‌الاسلام و همکاران با شبیه‌سازی قطره به روش شبکه بولتزمن کارهای با ارزشی در زمینه تحریک قطره با امواج آکوستیک انجام دادند [۲۶-۲۹].

۳- مدل فیزیکی

در این پژوهش، شکل‌گیری، نوسان و جدا شدن یک قطره آونگان منفرد در انتهای یک لوله موین را شبیه‌سازی شده است. فرض می‌شود که این مایعات هم دما، نیوتنی، غیرقابل تراکم و همسانگرد است. جریان غیردایم و انتقال جرم بین دو فاز صفر است. در آغاز، فاز سنگین در ناحیه وجود ندارد و رشد قطره با تزریق مایع آغاز می‌شود. ادامه این روند در نهایت منجر به جدا شدن قطره می‌شود. شکل ۱ نمایشی شماتیک از این مدل فیزیکی را نشان می‌دهد.



شکل (۱): شماتیک یک قطره آونگان.

13. Fakhari and Rahimian
14. Allen-Cahn
15. Cahn-Hilliard
16. Chiu and Lin
17. Jacqmin

(علمی-پژوهشی)

شبیه‌سازی به روش شبکه بولتزمن سه بعدی از نوسانات یک قطره آونگان در حال رشد

معادلات تعقیب مرز مشترک و هیدرودینامیک استفاده شده است. ثابت می‌شود که معادله شبکه بولتزمن زیر می‌تواند معادله (۱) را برای میدان فازی بقایی [۳۷-۳۹] را بازیابی کند که عبارت است از:

$$h_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) = h_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{h_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - h_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau_{\varphi} + 1/2}, \quad (11)$$

که در آن، τ_{φ} زمان آرامش فاز مورد نظر، h_{α} تابع توزیع میدان فاز و e_{α} مجموعه سرعت ماکروسکوپی است. در این مدل، تابع توزیع تعادل برای میدان فاز عبارت است از:

$$h_{\alpha}^{eq} = \varphi \Gamma_{\alpha} + w_{\alpha} \frac{M}{c_s^2} \left[\frac{4}{w} \varphi (1 - \varphi) \right] (\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{n}}), \quad (12)$$

که در آن،

$$\Gamma_{\alpha} = w_{\alpha} \left[1 + \frac{\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right], \quad (13)$$

و $c_s = c / \sqrt{3}$ سرعت صدا، w_{α} ضرایب وزنی و M تحرک سیستم است که به زمان آرامش به صورت زیر مرتبط می‌شود [۳۷]:

$$M = \tau_{\varphi} c_s^2 \Delta t. \quad (14)$$

معادله (۱۱) در دو مرحله حل می‌شود: برخورد و انتشار. پس از مرحله انتشار میدان فاز به صورت زیر به روز می‌شود:

$$\varphi = \sum_{\alpha} h_{\alpha}. \quad (15)$$

چگالی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho = \rho_L + \varphi(\rho_H - \rho_L). \quad (16)$$

برای یک جریان چند فازی تقریباً غیرقابل تراکم معادله شبکه بولتزمن [۳۸] عبارت است از:

$$\bar{g}_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) = \bar{g}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) + \Omega_{\alpha}(\mathbf{x}, t) + F_{\alpha}(\mathbf{x}, t), \quad (17)$$

که در آن، \bar{g}_{α} تابع توزیع هیدرودینامیکی است و Ω_{α} یک عملگر برخورد است. باز هم، این معادله را می‌توان با استفاده از رویکرد جریان-برخورد حل کرد. در معادله (۱۷)، جمله نیرویی است که برابر است با [۲۵]:

$$F_{\alpha} = \Delta t \left[(\Gamma_{\alpha} - w_{\alpha})(\rho_H - \rho_L) c_s^2 + \Gamma_{\alpha} \mu_{\varphi} \right] (\mathbf{e}_{\alpha} - \mathbf{u}) \cdot \Delta \varphi + \Delta t \Gamma_{\alpha} (\mathbf{e}_{\alpha} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{F}_b. \quad (18)$$

با استفاده از مدل زمان آرامش چندگانه برای عملگر برخورد، Ω_{α} عبارت است از:

$$\Omega_{\alpha} = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{M} (\bar{g}_{\alpha} - \bar{g}_{\alpha}^{eq}), \quad (19)$$

زاویه تماس θ در یک مرز جامد، شرایط تر شدن را پیشنهاد کرد. توجه داشته باشید φ_w میدان فاز در دیواره و $\hat{\mathbf{n}}_w$ بردار یکه دیوار است، یعنی:

$$\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \nabla \varphi|_{\text{ww}} = \Theta \varphi_w (1 - \varphi_w), \quad (4)$$

$$\Theta = -\sqrt{\frac{2\beta}{\kappa}} \cos \theta, \quad (5)$$

$$\kappa = 3\sigma \frac{W}{2},$$

$$\beta = \frac{12\sigma}{W},$$

که در آن، σ کشش سطحی است.

۴-۲- معادلات هیدرودینامیکی

برای یک جریان چندفازی همدمای تراکم‌ناپذیر، معادلات ناویر-استوکس عبارتند از [۳۵]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \right) + \mathbf{F}, \quad (7)$$

که در آن، ρ چگالی موضعی مایع، μ ویسکوزیته موضعی مایع و p فشار ماکروسکوپی است. همچنین، \mathbf{F} نیروی خارجی است که به سیال وارد می‌شود. در این مطالعه، نیرو از دو قسمت تشکیل شده است:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b, \quad (8)$$

که در آن، \mathbf{F}_b نیروی حجمی و \mathbf{F}_s نیروی کشش سطحی است. ژاکمین [۳۴] رابطه زیر را برای نیروی کشش سطحی پیشنهاد کرد:

$$\mathbf{F}_s = \mu_{\varphi} \nabla \varphi, \quad (9)$$

\mathbf{F}_b به صورت زیر است:

$$\mathbf{F}_b = (\rho_H - \rho_L) \mathbf{G}, \quad (10)$$

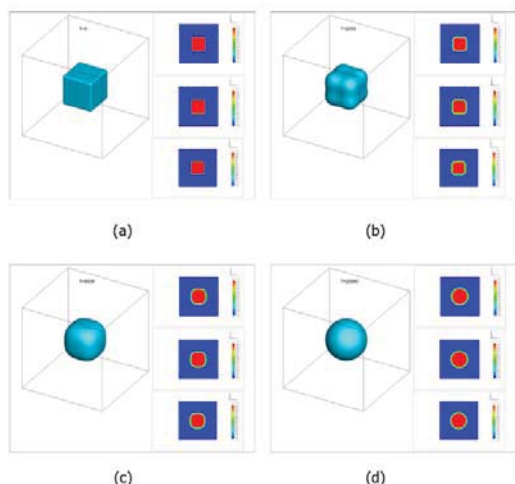
که در آن، \mathbf{G} شتاب گرانش، ρ_H و ρ_L به ترتیب چگالی فاز سنگین تر و سبک تر هستند. توجه داشته باشید که چگالی‌ها و نیروها موضعی هستند.

۵- روش عددی

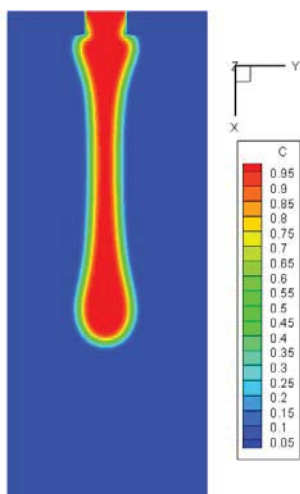
در پژوهش از روش شبکه بولتزمن ارایه شده برای میدان فازی بقایی پیشنهاد شده توسط فخاری و همکاران [۳۶] برای حل

۷- اعتبارسنجی مدل عددی

آزمون آرامش قطره مکعبی شکل با کشش سطحی $\sigma = 0.001$ نسبت تراکم برابر با ۰٫۱ و تحرک برابر با ۰٫۲ برای مطالعه کد کامپیوتر انجام شد. یک قطره مکعبی شکل با ۴۶ واحد شبکه در وسط یک میدان محاسباتی $90 \times 90 \times 90$ قرار گرفت. از شرایط مرزی متناوبی در مرزهای اطراف استفاده شد. تغییر شکل‌های قطره برای برخی از مراحل زمانی در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، تغییرات شکل قطره به شکل کروی پایان می‌یابد. شکل ۴ کانتور کسر حجمی قطره در حال رشد را به نمایش گذاشته است.



شکل (۳): آزمون آرامش قطره مکعب برای شبکه $90 \times 90 \times 90$ (a) در گام زمانی $t = 0$ ، (b) در گام زمانی $t = 2000$ ، (c) در گام زمانی $t = 8000$ و (d) در گام زمانی $t = 20000$.



شکل (۴): کانتور کسر حجمی قطره در حال رشد.

و برای محاسبه تابع توزیع تعادلی داریم:

$$\bar{g}_a^{eq} = g_a^{eq} - \frac{F_a}{2}, \quad (20)$$

$$g_a^{eq} = p w_a + \rho c_s^2 (\Gamma_a - w_a). \quad (21)$$

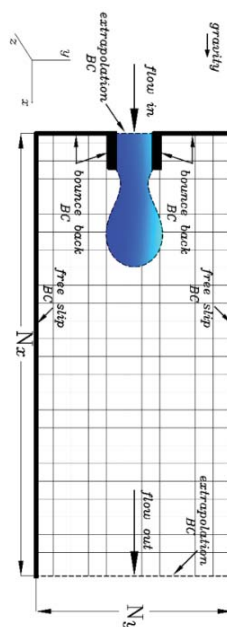
که در آن، \mathbf{M} یک نگاشت متعامد است که فضای فیزیکی را بر روی فضای منتوم می‌نگارد و $\hat{\mathbf{S}}$ ماتریس قطری آرامش است. پس از حل معادله (۱۷) و با به دست آوردن \bar{g}_a می‌توان خواص هیدرودینامیکی را با استفاده از معادلات زیر محاسبه کرد [۲۵]:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho c_s^2} \sum_a \bar{g}_a \mathbf{e}_a + \frac{\Delta t}{2\rho} (\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_b), \quad (22)$$

$$p = \sum_a \bar{g}_a + \frac{\Delta t}{2} (\rho_H - \rho_L) c_s^2 \mathbf{u} \cdot \Delta \varphi. \quad (23)$$

۶- اعمال شرط مرزی

در ناحیه محاسباتی، از سه شرایط مرزی مختلف استفاده شده است (شکل ۲). برای مرزهای ورودی و خروجی، روش درونیابی پیشنهادی چن^۸ و همکاران [۴۰] استفاده شد. ایده اصلی روش پیشنهادی استفاده از یک لایه شبکه در کنار ورودی و خروجی ناحیه محاسباتی است. قسمت غیر تعادلی توابع توزیع ناشناخته در این لایه‌های اضافی با برون‌یابی (درجه دوم) مقادیر تابع توزیع در حوزه جریان محاسبه می‌شود. برای لوله و دیواره‌های جامد سمت چپ، از یک شرط مرزی برگشت به عقب استفاده شد. برای دیواره‌های بالا و پایین، از شرایط مرز لغزش آزاد استفاده شد.

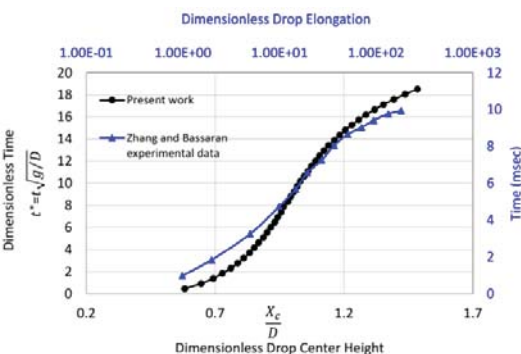


شکل (۲): شرط مرزی استفاده شده در ناحیه محاسباتی.

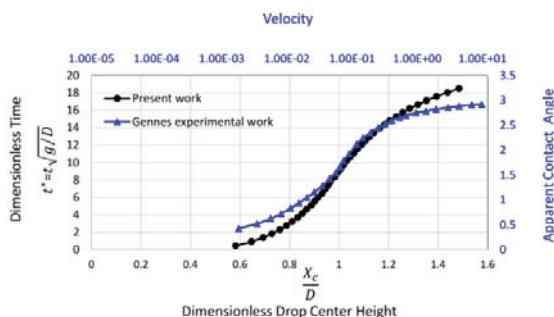
۸- اعتبارسنجی نتایج

ژانگ و باساران^{۱۹} آزمایش‌های گسترده‌ای در مورد تشکیل و جدا شدن قطره‌ها انجام دادند و تغییرات ضخامت گردن قطره را در مقابل زمان تشکیل قطره برای آب در هوا نشان دادند [۴۱]. نمودار ژانگ و باساران در کنار نمودار حاصل از این تحقیق در شکل ۵ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که روند تغییرات نیروی کشش سطحی در حال رشد قطره آونگان در هر دو نمودار یکسان است. همچنین، جونز [۴۲] نشان داد که نیروی کشش سطحی ماهیتی غیر خطی دارد. جونز دریافت که در آغاز تشکیل قطره، نیروی کشش سطحی افزایش می‌یابد و پس از آن در یک نقطه خاص شروع به کاهش می‌کند. این نتیجه‌گیری به خوبی با نتیجه این تحقیق در مورد تغییر نیروی کشش سطحی مطابقت دارد. مکانیک پدیده تر شدن به طور تجربی توسط گنس^{۲۰} مورد مطالعه قرار گرفت [۴۳]. گنس از یک قطره روغن سیلیکون روی شیشه استفاده کرد. او نشان داد که تغییر نیروی کشش سطحی به گونه‌ای است که از سه منطقه مجزا (سخت شونده، شبه خطی و نرم شونده) در هنگام رشد قطره تشکیل شده است. نمودار گنس در کنار نمودار حاصل از این تحقیق در شکل ۶ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، انطباق مناسبی بین روندهای دو منحنی وجود دارد. در توضیح علت تغییرات نیروی کشش سطحی با رشد قطره می‌توان گفت که در طول رشد قطره، زاویه تماس بین قطره در حال رشد و نوک لوله موئین شروع به افزایش می‌کند. افزایش زاویه تماس باعث افزایش مولفه عمودی نیروی کشش سطحی می‌شود که وزن قطره را خنثی می‌کند. روند افزایش مولفه عمودی نیروی کشش سطحی تا زمانی که زاویه تماس ۹۰ درجه شود (مولفه عمودی نیروی کشش سطحی) که انتهای ناحیه سخت شدن است، ادامه دارد. با افزایش زاویه تماس به بیش از ۹۰ درجه، مولفه عمودی نیروی کشش سطحی شروع به کاهش می‌کند (آغاز ناحیه نرم شونده). این روند آنقدر ادامه می‌یابد تا منجر به جدایش قطره شود.

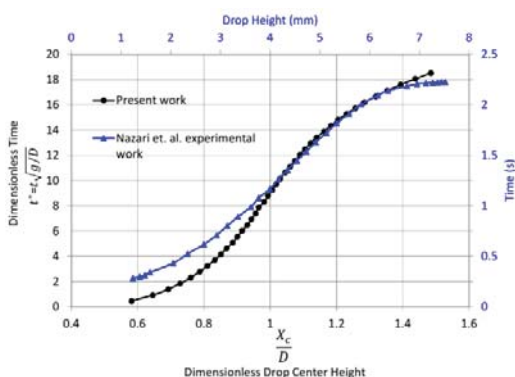
یکی از کارهای تجربی اخیر توسط نظری^{۲۱} و همکاران انجام شده است [۴۴]. در این کار تجربی، آنها پروفیل‌های قطره در حال رشد را با استفاده از یک دوربین پرسرعت بررسی کرده و منحنی تولید کرده‌اند که مرکز جرم قطره را نسبت به زمان رشد و تشکیل قطره مرتبط می‌کند. نمودار نظری و همکاران در کنار نمودار حاصل از این تحقیق در شکل ۷ نشان داده شده است که جایجایی نیرو در حال رشد را توصیف



شکل (۵): مقایسه روند تغییرات مرکز جرم قطره در حال رشد با نتایج ژانگ و باساران [۴۱].



شکل (۶): مقایسه روند تغییرات مرکز جرم قطره در حال رشد با نتایج گنس [۴۳].



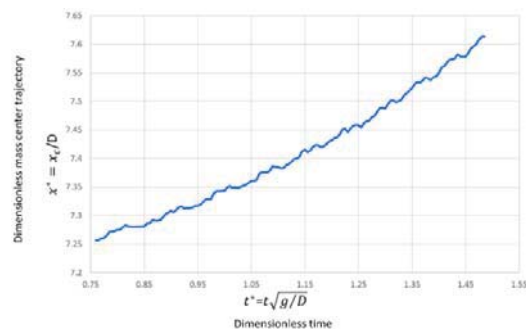
شکل (۷): مقایسه روند تغییرات مرکز جرم قطره در حال رشد با نتایج نظری و همکاران [۴۴].

۹- نتایج و بحث

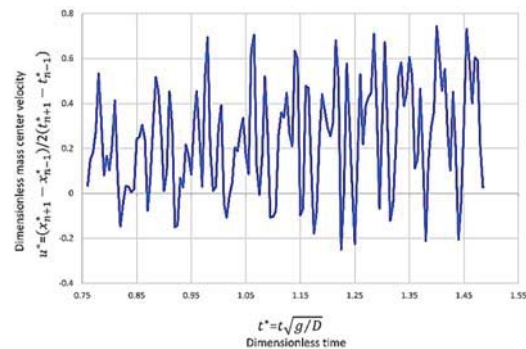
در این بخش به ارایه نتایج بدست آمده می‌پردازیم. نوسانات قطره در دو راستای طولی و عرضی بررسی شده‌اند. نتایج حاصل از این نوسانات با شکل‌های مناسب توضیح داده شده‌اند.

۹-۱- نوسانات طولی در خلال رشد قطره

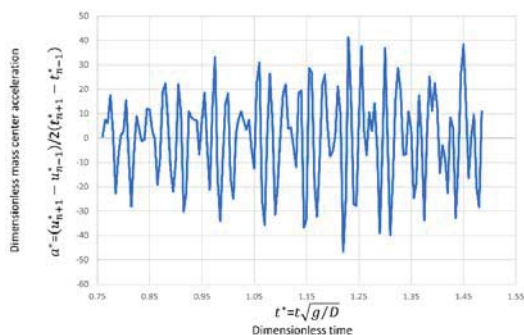
با توجه به شبیه‌سازی عددی سه بعدی شکل‌گیری قطره، در کل روند تشکیل قطره دارای شتاب نوسانی در جهت جریان است. نتیجه عددی چنین شبیه‌سازی در شکل ۸ نشان داده شده است، که در آن مسیر یک توده قطره در حال رشد مرکز نشان داده شده است. سرعت قطره را می‌توان از روی داده‌های شکل ۸ که در شکل ۹ رسم شده است، به صورت عددی ارزیابی کرد. همانطور که مشاهده می‌شود، قطره در حال رشد دارای یک سرعت نوسانی است. همچنین، با بهره‌گیری از داده‌های شکل ۹ می‌توان شتاب قطره را به صورت عددی محاسبه کرد (شکل ۱۰). از شکل ۱۰ مشخص است که قطره نیز دارای شتاب نوسانی است. حداکثر دامنه شتاب بدون بعد حدود ۳۵ و فرکانس بدون بعد حدود ۴۰ است. با توجه به اینکه قطره یک محیط الاستیک است، این شتاب نوسانی می‌تواند نماینده یک نیروی نوسانی باشد که با ارسال امواج آکوستیک بر جریان بالادست تأثیر می‌گذارد.



شکل (۸): خط مسیر مرکز جرم قطره در حال رشد.



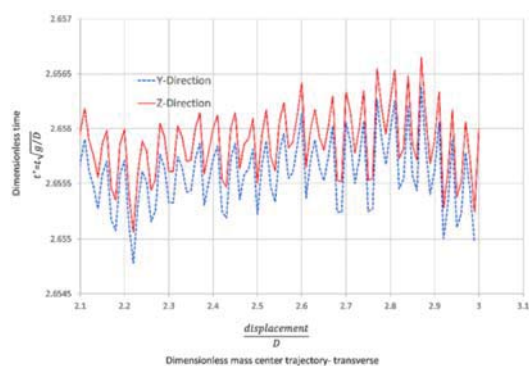
شکل (۹): سرعت بی بعد مرکز جرم قطره در حال رشد بر حسب زمان بی بعد.



شکل (۱۰): شتاب بی بعد مرکز جرم قطره در حال رشد بر حسب زمان بی بعد.

۹-۲- نوسانات طولی در خلال رشد قطره

طبق نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی سه بعدی، نوسانات در جهت Y و Z وجود دارند. با این حال، دامنه آنها بسیار کم و فرکانس آنها در مقایسه با نوسانات طولی بالا است. این نوسانات فرکانسی در حدود ۵۰۰ تا ۸۰۰ دارند (فرکانس بدون ابعاد). این واقعیت در شکل ۱۱ برای جهت‌های Y و Z نشان داده شده است.



شکل (۱۱): جابجایی عرضی بی بعد مرکز جرم قطره در حال رشد بر حسب زمان بی بعد.

۱۰- نتیجه گیری

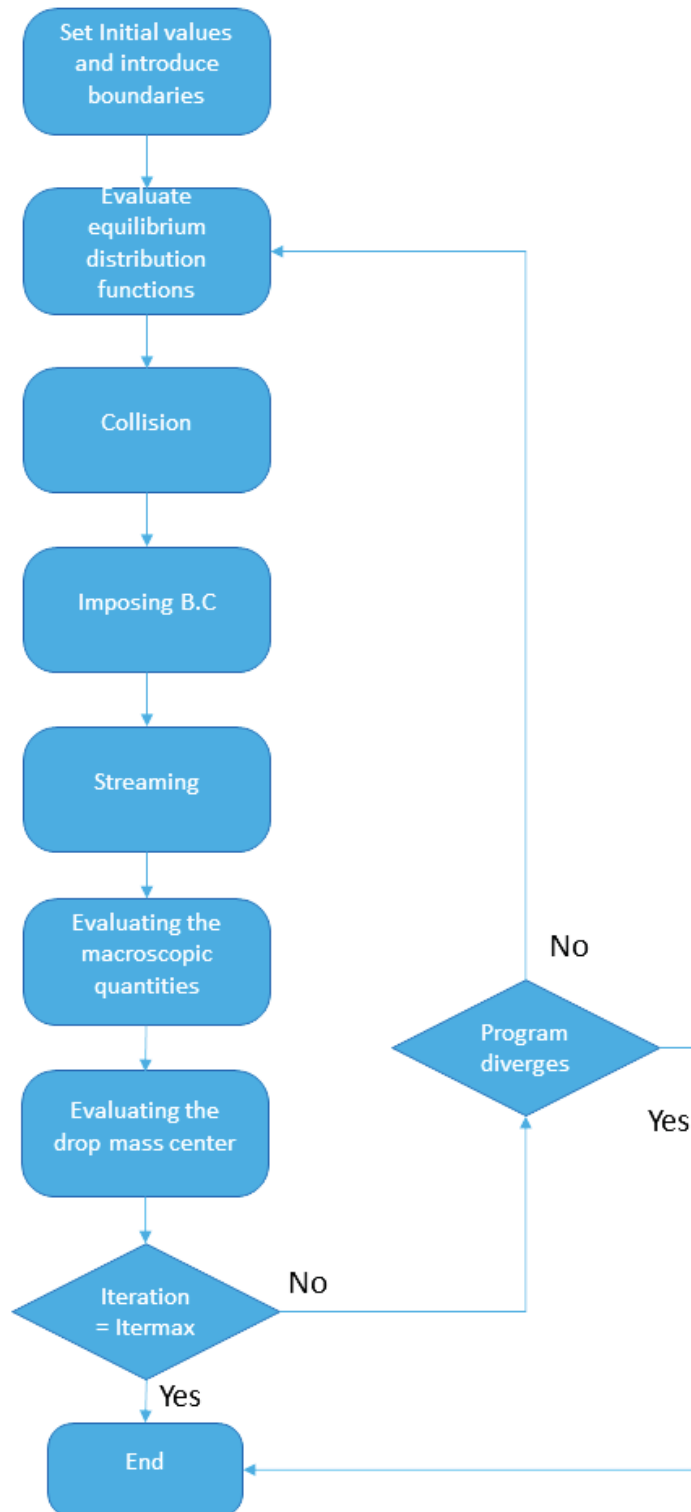
در این مقاله، ما نوسانات سه بعدی یک قطره آونگان را به صورت عددی بررسی کرده‌ایم. نشان داده شد که گرچه جریان در یک بعد است، اما نوسانات عرضی نیز در هنگام رشد یک قطره ایجاد می‌شوند. همچنین، مشاهده شد که دینامیک قطره آونگان در حال رشد دارای ماهیت غیر خطی است. علاوه بر این، نشان داده شد که مرکز جرم افت در حال رشد دارای شتاب نوسانی است که می‌تواند امواج صوتی را در بالادست تولید کند. در این تحقیق، با معرفی یک معادله جدید رفتار الاستیک غیرخطی قطره آونگان بررسی شد. این معادله به طور کامل مشخصات دینامیکی قطره آونگان (از شروع رشد تا جدا شدن) را بیان می‌کند. علاوه بر این، این معادله امکان بررسی رفتار الاستیک قطره آونگان در ناحیه سخت شونده و نرم شونده با استفاده از نقطه عطف را فراهم

(علمی-پژوهشی)

شبیه‌سازی به روش شبکه بولتزمن سه بعدی از نوسانات یک قطره آونگان در حال رشد

۱۱- ضمیمه

می‌کند. مطالعه رشد قطره نشان داد که جداسدگی قطره در نقطه ماکزیمم این معادله هنگامی رخ می‌دهد که قطره با عبور از نقطه عطف به منطقه نرم شونده وارد می‌شود.
فلوچارت کد کامپیوتری به شرح زیر است:



۱۲- مراجع

- [1] Miller, R. and Liggieri, L., *Bubble and Drop Interfaces. Sect. I.*, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 2011.
- [2] D'Innocenzo, A. and Renna, L., "Analytical Solution of the Dripping Faucet Dynamics", *Phys. Lett. A*, Vol. 220, pp. 75-80, 1996.
- [3] Shaw, R., *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System*, Aerial Press, Santa Cruz, CA, USA, 1984.
- [4] DePaoli, D.W., Feng, J.Q., Basaran, O.A., and Scott, T.C., "Hysteresis in Forced Oscillations of Pendant Drops", *Phys. Fluids*, Vol. 7, pp. 1181-1183, 1995.
- [5] Zhang, D.F. and Stone, H.A., "Drop Formation in Viscous Flows at a Vertical Capillary Tube", *Phys. Fluids*, Vol. 9, pp. 2234-2242, 1997.
- [6] Jones, L.A., Eagar, T.W., and Lang, JH., "A Dynamic Model of Drops Detaching from a Gas Metal Arc Welding Electrode", *J. Phys. D. Appl. Phys.*, Vol. 31, pp. 107-123, 1998.
- [7] Miller, R., Bree, M., and Fainerman, V.B., "Hydrodynamic Effects in Measurements with the Drop Volume Technique at Small Drop Times-3. Surface Tensions of Viscous Liquids", *Colloids Surfaces a Physicochem Eng. Asp.*, 142, pp. 237-242, 1998.
- [8] Lau, B. and Mashayek, F., "Dynamics of Oscillating Drops with Thermocapillary Effects", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, Vol. 14, pp. 203-222, 2001.
- [9] Davidson, M. and Copper-White, J., "Numerical Prediction of Shear-thinning Drop Formation", *Third International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries*, Melborn, Australia, 2003.
- [10] Cramer, C., "Continuous Drop Formation at a Capillary Tip and Drop deformation in a Flow Channel", *Ph.D. Dissertation*, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zürich, Swiss, 2004.
- [11] Fainerman, V.B. and Miller, R., "Hydrodynamic Effects in Measurements with the Drop Volume Technique at Small Drop Times. 2. Drop Time and Drop Volume Bifurcations", *Colloids Surfaces A Physicochem Eng. Asp.*, Vol. 97, pp. 255-262, 1995.
- [12] Fawehinmi, O.B., Gaskell, P.H., Jimack, P.K., Kapur, N., and Thompson, H.M., "A Combined Experimental and Computational Fluid Dynamics Analysis of the Dynamics of Drop Formation", *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C, J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 219, pp. 933-947, 2005.
- [13] Timgren, A., Trägårdh, G., and Trägårdh, C., "Effects of Cross-flow Velocity, Capillary Pressure and Oil Viscosity on Oil-in-water Drop Formation from a Capillary", *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 64, pp. 1111-1118, 2009.
- [14] Bostwick, J.B. and Steen, PH., "Capillary Oscillations of a Constrained Liquid Drop", *Phys. Fluids*, Vol. 21, P. 032108, 2009.
- [15] Bierbrauer, F., Kapur, N., Wilson, and M.C.T., "Drop Pinch-Off for Discrete Flows from a Capillary", *ESAIM Proc.*, Vol. 40, pp. 16-33, 2013.
- [16] Karbaschi, M., Taeibi Rahni, M., Javadi, A., Cronan, C.L., Schano, K.H., and Faraji, S., "Dynamics of Drops — Formation, Growth, Oscillation, Detachment, and Coalescence", *Adv. Colloid Interface*, Vol. 222, pp. 413-424, 2015.
- [17] Nooranidoost, M., Izbassarov, D., and Muradoglu, M., "Droplet Formation in a Flow Focusing Configuration: Effects of Viscoelasticity", *Phys. Fluids*, Vol. 28, P. 123102, 2016.
- [18] Taeibi Rahni, M., Karbaschi, M., and Miller, R., *Computational Methods for Complex Liquid-Fluid Interfaces*, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 2015.
- [19] Fakhari, A. and Rahimian, M.H., "Simulation of Falling Droplet by the Lattice Boltzmann Method", *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Vol. 14, pp. 3046-3055, 2009.
- [20] Fakhari, A. and Rahimian, M.H., "Phase-field Modeling by the Method of Lattice Boltzmann Equations", *Phys. Rev. E - Stat Nonlinear, Soft Matter Phys.*, Vol. 81, P. 036707, 2010.
- [21] Fakhari, A. and Rahimian, M.H., "Investigation of Deformation and Breakup of a Falling Droplet Using a Multiple-relaxation-time Lattice Boltzmann Method", *Comput. Fluids*, Vol. 40, pp. 156-171, 2011.
- [22] Fakhari, A. and Lee, T., "Multiple-relaxation-time Lattice Boltzmann Method for Immiscible Fluids at High Reynolds Numbers", *Phys. Rev. E - Stat Nonlinear, Soft Matter Phys.*, Vol. 87, P. 023304, 2013.
- [23] Geier, M., Fakhari, A., and Lee, T., "Conservative Phase-field Lattice Boltzmann Model for Interface Tracking Equation", *Phys. Rev. E - Stat Nonlinear, Soft Matter Phys.*, Vol. 91, P. 021108, 2015.

- [24] Fakhari, A., Geier, M., and Lee, T., "A Mass-conserving Lattice Boltzmann Method with Dynamic Grid Refinement for Immiscible Two-phase Flows", *J. Comput Phys.*, Vol. 315, pp. 434-457, 2016.
- [25] Fakhari, A. and Bolster, D., "Diffuse Interface Modeling of Three-phase Contact Line Dynamics on Curved Boundaries: a Lattice Boltzmann Model for Large Density and Viscosity Ratios", *J. Comput Phys.*, Vol. 334, pp. 620-638, 2017.
- [26] Sheikholeslam Noori, S.M., Taeibi Rahni, M., and Shams Taleghani, S.A., "Numerical Analysis of Droplet Motion over a Flat Plate Due to Surface Acoustic Waves", *Microgravity Sci. Technol.*, Vol. 32, No. 4, pp. 647-660, 2020.
- [27] Sheikholeslam Noori, S.M., Taeibi Rahni, M., and Shams Taleghani, S.A., "Multiple-relaxation Time Color-gradient Lattice Boltzmann Model for Simulating Contact Angle in Two-phase Flows with High Density Ratio", *Eur. Phys. J. Plus*, Vol. 134, No. 8, P. 399, 2019.
- [28] Sheikholeslam Noori, S.M., Taeibi Rahni, M., and Shams Taleghani, S.A., "Phenomenological Investigation of Drop Manipulation Using Surface Acoustic Waves", *Microgravity Sci. Technol.*, Vol. 32, No. 6, pp. 1147-1158, 2020.
- [29] Sheikholeslam Noori, S.M., Taeibi Rahni, M., and Shams Taleghani, S.A., "Effects of Contact Angle Hysteresis on Drop Manipulation Using Surface Acoustic Waves", *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, Vol. 9, No's. 1-2, pp. 145-162, 2020.
- [30] Cahn, J.E. and Hilliard, J.W., "Free Energy of a Nonuniform System. II. Interfacial Free Energy Thermodynamic Basis", *J. Chem. Phys.*, Vol. 28, pp. 258-267, 1958.
- [31] Allen, S.M. and Cahn, J.W., "A Microscopic Theory for Antiphase Boundary Motion and Its Application to Antiphase Domain Coarsening", *Acta Metall.*, Vol. 27, pp. 1085-1095, 1979.
- [32] Chiu, P-H. and Lin, Y-T., "A Conservative Phase Field Method for Solving Incompressible Two-phase Flows", *J. Comput. Phys.*, Vol. 230, pp. 185-204, 2011.
- [33] Lee, T., "Effects of Incompressibility on the Elimination of Parasitic Currents in the Lattice Boltzmann Equation Method for Binary Fluids", *Comput. Math with Appl.*, Vol. 58, pp. 987-994, 2009.
- [34] Jacqmin, D., "Calculation of Two-Phase Navier–Stokes Flows Using Phase-Field Modeling", *J. Comput. Phys.*, Vol. 155, pp. 96-127, 1999.
- [35] Clift, R., Grace, J.R., and Weber, M.E., *Bubbles, Drops, and Particles*, Academic Press, New York, USA, 1978.
- [36] Mitchell, T., Leonardi, C., and Fakhari, A., "Development of a Three-dimensional Phase-field Lattice Boltzmann Method for the Study of Immiscible Fluids at High Density Ratios", *Int. J. Multiph. Flow*, Vol. 107, pp. 1-15, 2018.
- [37] Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., and Viggen, E.M., *The Lattice Boltzmann Method*, Springer International Publishing, New York, USA, 2017.
- [38] Fakhari, A., Mitchell, T., Leonardi, C., and Bolster, D., "Improved Locality of the Phase-field Lattice-boltzmann Model for Immiscible Fluids at High Density Ratios", *Phys. Rev. E.*, Vol. 96, P. 201107, 2017.
- [39] Fakhari, A., Bolster, D., and Luo, L-SS., "A Weighted Multiple-relaxation-time Lattice Boltzmann Method for Multiphase Flows and Its Application to Partial Coalescence Cascades", *J. Comput. Phys.*, Vol. 341, pp. 22-43, 2017.
- [40] Chen, S., Martinez, D., and Mei, R., "On Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Methods", *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 2527-2536, 1996.
- [41] Zhang, X. and Basaran, O.A., "An Experimental Study of Dynamics of Drop Formation", *Phys. Fluids*, Vol. 7, pp. 1184-1203, 1995.
- [42] Jones, L.A., "Dynamic Electrode Forces in Gas Metal Arc Welding", *Ph.D. Dissertation*, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA, 1996.
- [43] de Gennes, P.G., "Wetting: Statics and Dynamics", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 57, pp. 827-863, 1985.
- [44] Nazari, A., Zadkazemi Derakhshi, A., Nazari, A., and Firoozabadi, B., "Drop Formation from a Capillary Tube: Comparison of Different Bulk Fluid on Newtonian Drops and Formation of Newtonian and Non-newtonian Drops in Air Using Image Processing", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 124, pp. 912-919, 2018.
- [45] Moon, J.H., Kang, B.H., and Kim, H-Y. "The Lowest Oscillation Mode of a Pendant Drop", *Phys. Fluids*, Vol. 18, P. 21702, 2006.