



(علمی - پژوهشی)

## مدلسازی دینامیک غیر خطی به کمک شبکه‌های عصبی عمیق

## بازگشتی مطلع از فیزیک

در این مقاله به بررسی قدرت پیشبینی شبکه‌های عصبی بازگشتی (Recurrent Neural Networks - RNNs) و به صورت ویژه شبکه‌های مطلع از فیزیک (Physics-Informed Networks - PINNs) برای دینامیک‌های غیرخطی پرداخته شده است. شبکه‌های مطلع از فیزیک شبکه‌های عصبی بدون نظارتی (unsupervised) هستند که در آن‌ها صرف برقراری رابطه‌ی ورودی و خروجی مد نظر قرار نگرفته و برقراری رابطه‌ی مشخصی میان مشتقات به عنوان تابع هدف آموزش تعیین می‌گردد. این مشخصه‌ی شبکه‌های مطلع از فیزیک به ما کمک خواهد کرد تا معادلات دیفرانسیل غیرخطی پیچیده‌ای را با این دسته از شبکه‌های عصبی تقریب زده و برای طراحی کنترل‌کننده‌های پیچیده از این تقریب به عنوان حل‌گر زمان-حقیقی مدل سامانه استفاده گردد. در این تحقیق نشان داده خواهد شد که این رده از شبکه‌های عصبی به خوبی توانمندی اخذ دینامیک سامانه را دارند و حتی در مناطقی از فضای حالت که به شبکه نقطه‌ی نمونه‌ای داده نشده است تقریب قابل قبولی از سامانه بدست می‌دهند. برای اثبات این فرضیه، در مقاله‌ی حاضر سه دسته از دینامیک‌های غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته‌اند: سیستم‌های (۱) خود- پایا (self-sustained)، (۲) تحریک شونده (excitatory) و (۳) آشوبناک (chaotic). نتایج ارائه شده نشان‌دهنده‌ی توانمندی شبکه‌های مطلع از فیزیک برای تخمین سامانه‌های خود- پایا و آشوبناک است. این در حالی است که پاسخ شبکه در پیش‌بینی رفتار شبکه‌های تحریک شونده مطلوب نبوده و نیاز به مطالعه‌ی بیش‌تر دارد.

واژه‌های کلیدی: شبکه مطلع از فیزیک، تقریب دینامیک‌های غیرخطی، شبکه بدون نظارت، شبکه بازگشتی

### Modeling and Simulation of Nonlinear Dynamics Using Physics-Informed Deep Neural Networks

Development of Physics-Informed Neural Networks (PINNs) as nonlinear dynamics surrogates is investigated. PINNs are unsupervised neural networks in which the input-output relationship is established via a specific dynamic relationship (differential equation). In this regard, the derivatives are determined by utilizing Automatic Differentiation over the network's graph. Hence, PINNs can be utilized to build complex surrogates for nonlinear dynamical systems which can later be used in real-time control applications. In this study, it is shown that PINNs can adequately capture the dynamics investigated. Even in regions of the state space where there are no training sample points, a PINN surrogate provides an acceptable approximation of the dynamical system. To investigate the hypothesis, three categories of nonlinear dynamics are examined: (1) self-sustained, (2) excitatory, and (3) chaotic systems. As implied by the results, PINNs can estimate self-sustaining and chaotic systems with sufficient accuracy. However, the concept is not as successful with excitatory dynamics that mandates further detailed studies on these surrogates.

**Keywords:** Physics-Informed Neural Network, Nonlinear Dynamic Surrogate, Unsupervised Learning, Recurrent Network

سیدحسین پورتاکدوست<sup>۱\*</sup>، امیرحسین  
خدابخش<sup>۲\*\*</sup>

۱ و ۲ - دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی  
شریف، تهران، ایران

\* استاد (نویسنده پاسخگو)،

ایمیل: pourtak@sharif.edu

\*\* دانشجوی دکتری

S. H. Pourtakdoust<sup>1\*</sup>, A. H.  
Khodabakhsh<sup>2\*\*</sup>

1, 2- Department of Aerospace  
Engineering at Sharif University of  
Technology, Tehran, IRAN

\* Professor (Corresponding  
Author)

Email: pourtak@sharif.edu

\*\* Ph. D. Student

## (علمی - پژوهشی)

سیدحسین پورتاکدوست، امیرحسین خدابخش

## مقدمه

یکی از کاربردهای مهم مدل‌های جایگزین را می‌توان در روش‌های کنترل مدرن، نظیر کننده‌های مدل پیش‌بین غیر خطی<sup>۱</sup> و کنترل کننده‌های مدل مبنای دانست. با توجه به پیچیدگی زیاد در دینامیک سامانه‌های هوافضایی، توسعه و پیش‌برد این گونه از مدل‌های جایگزین کمک شایانی به پیاده‌سازی موفق این کنترل کنترل کننده‌های مدرن خواهد کرد. با عنایت به این موضوع، در پژوهش پیش رو با استفاده از جدیدترین پیشرفت‌های حاصل شده در حیطه‌ی یادگیری ماشین و شبکه‌های عمیق، توسعه‌ی مدل‌های جایگزین دینامیک‌های غیرخطی به کمک شبکه‌های مطلع از فیزیک<sup>۲</sup> مورد مطالعه قرار گرفته‌است. تعیین و تشخیص کامل دینامیک‌های غیرخطی عموماً به کمک انجام آزمایش بر روی سامانه‌ی مورد نظر و تحریک آن به کمک ورودی‌های مشخص امکان‌پذیر است. این در حالی است که در بیش‌تر اوقات داده‌های عملیاتی از یک سامانه به صورت منفعل وجود داشته و در موارد بسیار معدودی رفتار سامانه‌های غیرخطی در مواجهه با ورودی‌های بهینه جهت شناسایی در دسترس است. در این پژوهش تلاش شده‌است با استفاده از شبکه‌های عصبی، روشی جهت استخراج دینامیک‌های غیرخطی با فرض داشتن تقریبی از معادلات عمومی حاکم بر آن‌ها ارائه شود. شبکه‌های عصبی بازگشتی<sup>۳</sup> یکی از شبکه‌های اثبات شده در ادبیات پژوهشی برای تخمین سری‌های زمانی است. این رده از شبکه‌های عصبی می‌توانند جهت تخمین رفتار زمانی آموزش ببینند و تخمینی از دینامیک یک سامانه را ارائه دهند. داشتن مدل دقیقی از یک سامانه‌ی غیرخطی می‌تواند در طراحی الگوریتم‌های کنترلی و بطور کلی در فرآیندهای طراحی مدل مبنای مورد استفاده قرار گیرد. در روش‌های سنتی، مدل‌سازی سامانه‌های دینامیک معمولاً با استدلال مستقیم از معادلات پایه آغاز می‌گردید. اما با پیشرفت علم و مواجهه با سامانه‌های با درجات آزادی بالا و پیچیده، بدست آوردن مدل‌هایی که با دقت قابل قبولی بتوانند رفتار سامانه را پیش‌بینی کند با سختی‌های متعددی روبرو می‌گردد. این در حالی است که به کمک روش‌های جدیدی نظیر شبکه‌های عصبی می‌توان تقریب بسیار خوبی از یک سامانه‌ی دینامیکی بدست آورد و مدل‌های بدست‌آمده را با داده‌های تست تطبیق داد. با فرض رفتار نوسانی برای دینامیک غیرخطی می‌توان ادعا کرد در صورت ضعیف بودن اغتشاش وارده به آن، فارغ از بعد سامانه، رفتار همواره در فضای فاز گر همسایگی یک منیفولد<sup>۴</sup> دو بعدی قرار خواهد گرفت و در نتیجه می‌توان

دینامیک را با یک دینامیک دوبعدی تخمین زد [۲۴]. بر این اساس می‌توان گفت صحت مدل‌های بدست آمده از سامانه‌های غیرخطی عموماً محدود به بازه‌ی مشخصی از فضای فاز می‌گردند.

تا به امروز ادبیات پژوهشی شاهد ارائه‌ی روش‌های بسیار متنوعی برای تقریب و مدل‌سازی دینامیک‌های غیرخطی بوده‌است. این در حالی است که پیش‌بینی رفتارهای غیرخطی نظیر چندشاخه‌گی<sup>۵</sup> همواره به عنوان یک چالش در پیاده‌سازی این روش‌ها مطرح است [۲]. یکی از روش‌های قدیمی و متداول در تشخیص و تقریب دینامیک‌های غیرخطی روش‌های رگرسیون غیرخطی است [۳]. این در حالی است که استفاده از انواع رگرسیون‌های خطی و غیرخطی مستلزم مفروض داشتن ساختار مشخصی بر روی داده‌های بدست آمده از تست‌های تجربی است [۴]. روش‌های جستجوگر<sup>۶</sup> نیز رده‌ی دیگری از الگوریتم‌های تقریب سیستم‌های دینامیکی به شمار می‌روند [۵]. از میان روش‌های جستجوگر می‌توان به روش‌های شبکه‌های عصبی، انعکاس حالت<sup>۷</sup> و ماشین‌های با حالت سیال<sup>۸</sup> اشاره کرد [۶]. تحقیقات متنوعی برای بررسی کارایی این روش‌ها در تولید مدل جایگزین در دینامیک‌های غیرخطی انجام شده‌است. به عنوان مثال، پاتاک و همکاران در تحقیقی به بررسی روش محاسبات مخزن<sup>۹</sup> برای استخراج روشی جهت تخمین یک دینامیک خطی با استفاده از داده‌های تست و بدون در نظر گرفتن یک مدل از پیش تعیین شده پرداخته‌است [۶]. همچنین در تحقیق دیگری محاسبات مخزن جهت تقریب دینامیک‌های آشوبناک مورد بررسی قرار گرفته‌است [۷]. البته استفاده از روش‌های یادگیری مبنای در تحقیقات متعددی برای توسعه‌ی مشاهده‌گر نیز مورد استفاده قرار گرفته‌است که با توجه به رویکردهای مشابه در استفاده از مشاهده‌گر و مدل جایگزین، اشاره به این رده از تحقیقات اجتناب ناپذیر است [۸]. روش‌های ذکر شده عموماً با موفقیت امکان معادلسازی دینامیک غیرخطی را ارائه می‌دهند اما در تخمین رفتار سامانه در قسمتی از فضای حالت که در آموزش شبکه مشارکت نداشته‌است عملکرد ضعیفی را از خود نشان می‌دهند [۹]. نکته‌ی مهمی که در روش‌های بیان شده لازم به ذکر است فرض‌های وجود جواب و مقاومت آن در برابر خطاهای عددی محتمل است و می‌توان گفت در صورت نقض فرض دوم این روش‌ها به پاسخ صحیحی همگرا نخواهند شد [۱۰].

استفاده از شبکه‌های عصبی در مدل‌سازی و تقریب دینامیک‌های غیرخطی در ادبیات پژوهشی از سبقه‌ای نسبتاً طولانی

7. manifold  
8. Bifurcation  
9. Heuristics  
10. Echo state networks  
11. Liquid-state machines  
12. Reservoir Computing

1. Nonlinear Model Predictive Control  
2. Model Reference Control  
3. Physics-Informed Neural Networks - PINNs  
4. Recurrent  
5. Model-Based  
6. state-space

شبکه به عنوان ورودی نیز به شبکه ارائه می‌شود و این حلقه‌ی بازخورد به شبکه در راستای تشخیص رفتار متغیر با زمان و دینامیک کمک می‌کند.

استفاده از شبکه‌های عصبی برای کنترل دینامیک‌های غیرخطی از قدمتی چندین ساله برخوردار است. توانمندی منحصر به فرد شبکه‌های عصبی در تقریب نگاشت‌های پیچیده‌ی غیرخطی، امکان استفاده از این ابزار را در کنترل‌های پیچیده فراهم می‌آورد. اولین استفاده از شبکه‌های عصبی برای کنترل دینامیک‌های غیرخطی را شاید بتوان مربوطه به کار مشترک گامی و کاواتو در سال ۱۹۹۳ دانست [۱۶]. این در حالی است که استفاده از شبکه‌های عصبی محدود به دینامیک‌های با زمان پیوسته نبوده و کنترل دینامیک‌های غیرخطی زمان گسسته نیز به کرات در ادبیات پژوهشی به کمک شبکه‌های عصبی مورد بررسی قرار گرفته‌است [۱۷]. این موارد در حالی است که استفاده از شبکه‌های عصبی مطلع از فیزیک با توجه به بدیع بودن آن‌ها در گام‌های ابتدایی بوده و تحقیقات در مورد آن‌ها در حال انجام است. به عنوان نمونه برای کنترل دینامیک‌های خطی به کمک شبکه‌های عصبی مطلع از فیزیک می‌توان به تحقیق آرنولد و کینگ اشاره کرد که طی آن پیاده‌سازی این رده از شبکه‌های عصبی برای اعمال کنترل بر روی یک مدل خطی در فضای حالت مورد ارزیابی قرار گرفته‌است [۱۸].

در مقاله‌ی حاضر به بررسی توانمندی شبکه‌های عصبی بازگشتی مطلع از فیزیک برای مدلسازی دینامیک غیرخطی پرداخته شده و حساسیت آن‌ها به اغتشاشات و تغییر پارامتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. یکی از مهم‌ترین محدودیت‌های در نظر گرفته شده در عموم مقالات ارائه شده در ادبیات پژوهشی، تعداد گام پیشینی توسط شبکه‌ی عصبی است. در اکثر مقالات ارائه شده در این زمینه معمولاً از شبکه‌ی عصبی برای تخمین خروجی تنها در یک گام آینده استفاده می‌شود. این در حالی است که با ملزم کردن شبکه‌ی عصبی به ارضاء شرایط دینامیک سامانه، امکان دریافت تخمین در چندین گام آینده نیز بوجود خواهد آمد. ساختار مقاله‌ی پیش‌رو بدین شرح است: در بخش نخست به توضیح مختصری در مورد شبکه‌های عصبی مطلع از فیزیک و شبکه‌های بازگشتی پرداخته خواهد شد و روندی برای ترکیب این دو مفهوم ارائه می‌گردد. در بخش دوم معماری شبکه معرفی شده و نحوه‌ی آموزش آن مورد اشاره قرار می‌گیرد. بخش سوم به مطالعه‌ی عددی ساختار پیشنهادی اختصاص خواهد داشت. برای این مهم دینامیک‌های غیرخطی متفاوتی در قالب این شبکه مدلسازی شده و توانمندی شبکه در راستای پیش‌بینی رفتار دینامیک مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. بخش چهارم نیز به مقایسه‌ی نتایج بدست آمده، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری اختصاص یافته‌است.

برخوردار است. به عنوان نمونه می‌توان به پژوهش ارائه شده در [۱۱] به عنوان یکی از اولین تلاش‌ها در این زمینه اشاره نمود. در این تحقیق شبکه‌ی بازگشتی به عنوان راهکاری برای تقریب مسیر در فضای فاز استفاده شده‌است. فوناهاشی و ناکامارا نیز در مقاله‌ی بر این نکته تأکید کرده‌اند که یک شبکه‌ی بازگشتی توانمندی باز تولید مسیر سیستم‌های دینامیک در فضای فاز با تعداد درجات آزادی محدود را دارد [۱۲]. در تحقیق دیگری بیلر و همکاران از داده‌های تجربی بدست آمده از تست و بهره‌گیری از شبکه‌ی بازگشتی اقدام به باز تولید مدل دینامیکی نموده‌اند [۱۳]. این در حالی است که تلاش برای مدلسازی دینامیک به کمک شبکه‌های عصبی تنها محدود به شبکه‌های بازگشتی نبوده و در تحقیقات متعددی استفاده از شبکه‌های رو به جلو نیز در مورد بررسی قرار گرفته‌است. در این میان می‌توان به تحقیق وزیل و همکاران اشاره کرد [۱۴]. این مقاله به بررسی امکان مدلسازی دینامیک به کمک یک شبکه‌ی چند لایه‌ی رو به جلو پرداخته‌است. نکته‌ی اساسی در مطالعات گذشته تأکید بر قابلیت شبکه‌های عصبی در استخراج روابط خطی و غیرخطی بوده‌است و بر همین اساس شبکه‌ها معمولاً بدون در نظر گرفتن قیود فیزیکی و صرفاً از طریق بررسی رابطه‌ی ورودی و خروجی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این در حالی است که با اعمال قیود فیزیکی در فرآیند آموزش می‌توان شبکه‌ی عصبی را به اکتساب مشخصه‌های دینامیکی مجاب کرد و در نتیجه مدل عمومی‌تری از فضای فاز را توسط شبکه بدست آورد و رفتار دینامیک را در قسمت‌هایی از فضای فاز که داده‌های آموزش در آن‌ها وجود ندارد نیز با تقریب خوبی صادق دانست.

در کنار روش‌های ذکر شده جهت تعریف شبکه‌های عصبی می‌توان به روش بدیع و نوین شبکه‌های مطلع از فیزیک نیز اشاره کرد [۱۵]. شبکه‌های عصبی مطلع از فیزیک به نوعی دانش قبلی طراح از سامانه‌ی دینامیکی را در طراحی و آموزش شبکه دخیل می‌کنند و رفتار فیزیکی مطلوب را بر شبکه‌ی عصبی الزام می‌کنند. به این ترتیب با توجه به ارضاء معادلات دینامیکی توسط شبکه عصبی می‌توان انتظار داشت رفتار شبکه به عنوان یک برون‌یاب نیز همانند تخمین‌های آن در بخش‌هایی از فضا که داده‌ی آموزشی از آن در دست نبوده معادلات دینامیکی را ارضاء نماید و در نتیجه با تنظیم کردن این رده از شبکه‌ها در بخشی از فضا و به کمک معادلات دینامیکی حاکم برون‌یاب نسبتاً دقیقی از سامانه بدست آورد. در شبکه‌های مطلع از فیزیک می‌توان از تمامی ساختارهای پیشنهاد شده در ادبیات پژوهشی بهره برد اما یکی از دقیق‌ترین شبکه‌ها در تخمین معادلات دینامیکی شبکه‌های بازگشتی<sup>۲</sup> هستند. در شبکه‌های بازگشتی، بر خلاف شبکه‌های سنتی رو به جلو خروجی

3. Feed-back

1. Feed-forward

2. Recurrent

$$\text{Swish: } \sigma(x) = \frac{x}{1+e^{-x}} \quad (2)$$

### شبکه‌های عصبی مطلع از فیزیک

تعریف و آموزش شبکه‌های عصبی از ابتدای پیدایش همواره به کمک روش‌های گرادینانی و مشتق‌پذیری آن‌ها بوده‌است. در فرآیند آموزش یک شبکه معمولاً پس از محاسبه‌ی خروجی، به کمک الگوریتم‌های مشتق‌گیری اتوماتیک<sup>۹</sup> و انتشار معکوس<sup>۱۰</sup> مشتق تابع خطای شبکه نسبت به وزن‌های مورد آموزش محاسبه شده و به کمک روش‌هایی گرادینانی نظیر بیش‌تر نرخ نزول<sup>۱۱</sup> این خطا کاهش می‌یابد. این در حالی است که در بسیاری از تعاریف شبکه‌ی عصبی روابط ریاضی از کلاس  $\infty^C$  بوده و همواره مشتق‌پذیری خود را حفظ می‌کنند. به این ترتیب در هر گام آموزش شبکه‌ی عصبی، علاوه بر مشخص بودن خروجی شبکه، مشتق‌های خروجی نسبت به ورودی نیز تا هر مرتبه‌ی دلخواه به راحتی قابل محاسبه است. این واقعیت منجر به پیشنهاد مفهوم شبکه‌های مطلع از فیزیک توسط رئیسی و همکاران شد<sup>[۱۵]</sup>.

مطابق با مفهوم پیشنهاد شده برای شبکه‌های مطلع از فیزیک، فرآیند آموزش شبکه دستخوش تغییر خواهد شد. مطابق با آنچه ذکر گردید در شبکه‌های متداول فرآیند آموزش با کمینه کردن اختلاف خروجی نسبت به مقدار مطلوب صورت می‌پذیرد. این در حالی است که با تعریفی متفاوت از تابع خطا می‌توان شبکه‌ی عصبی را مجاب به ارضاء معادله‌ی خاصی میان مشتقات مشتقات خروجی نسبت به ورودی کرد و بدون ارائه‌ی مجموعه‌ی پاسخ مطلوب به کمک شبکه و به صورت نظارت نشده<sup>۱۲</sup> اقدام به حل معادله‌ی دیفرانسیل کرد. به صورت عمومی ورودی شبکه‌ی عصبی را زمان  $t$  و خروجی آن را  $x$  در نظر بگیرید. در این صورت رابطه‌ی تابعی بین ورودی شبکه و خروجی آن برقرار خواهد شد.

$$x = f_N(t) \quad (3)$$

همانطور که گفته شد، شبکه‌ی عصبی می‌تواند به گونه‌ای تعریف گردد که تا مرتبه‌ی بی‌نهایت مشتق‌پذیری خود را حفظ کند. بر این اساس با هر بار ارائه‌ی مقدار ورودی به شبکه‌ی عصبی، با بهره‌گرفتن از الگوریتم مشتق‌گیری اتوماتیک می‌تواند مشتق خروجی شبکه  $(\dot{x})$  را نسبت به ورودی شبکه  $(t)$  بدست آورد.

$$\dot{x} = \frac{\partial f_N(t)}{\partial t}; \quad \ddot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f_N(t)}{\partial t} \right) \quad (4)$$

### تخمین دینامیک‌های غیرخطی به کمک شبکه عصبی

#### شبکه‌های عصبی بازگشتی

ساده‌ترین نوع شبکه‌های عصبی، شبکه‌های رو به جلو هستند. در این رده از شبکه‌ها جریان داده از لایه‌ی ورودی به سمت لایه‌ی خروجی برقرار می‌شود و این جریان هیچ‌گونه حلقه‌ای تشکیل نمی‌دهد. در کنار این رده از شبکه‌های عصبی، شبکه‌های بازگشتی قرار دارند. اساسی‌ترین تفاوت شبکه‌های عصبی بازگشتی و شبکه‌های روبه‌جلو، امکان تشکیل حلقه بازخورد در شبکه‌های بازگشتی است. با در نظر گرفتن تشابه این ساختار با حل‌گرهای عددی معادلات دیفرانسیل (حل‌گر اویلر در ساده‌ترین حالت) می‌توان دریافت این رده از شبکه‌ها قابلیت ذخیره‌ی داده را در خود دارند. به عبارت دیگر شبکه‌های بازگشتی خود می‌توانند دارای دینامیک باشند. یکی از معروف‌ترین شبکه‌های بازگشتی، شبکه‌های با حافظه‌ی کوتاه مدت طولانی<sup>۱۳</sup> یا به اختصار LSTM است<sup>[۱۹]</sup>. از بارزترین شاخصه‌های شبکه‌های LSTM توانمندی استخراج تابعیت‌های طولانی مدت در یک داده‌ی زمانی است.

$$\begin{cases} i_k = \sigma(W_i \cdot [C_{k-1}, h_{k-1}, x_k] + b_i) \\ f_k = \sigma(W_f \cdot [C_{k-1}, h_{k-1}, x_k] + b_f) \\ \tilde{C}_k = \tanh(W_c \cdot [h_{k-1}, x_k] + b_c) \\ C_k = f_k \circ C_{k-1} + i_k \circ \tilde{C}_k \\ o_k = \sigma(W_o \cdot [C_k, h_{k-1}, x_k] + b_o) \\ h_k = o_k \circ \tanh(C_k) \end{cases} \quad (1)$$

• یک واحد LSTM را می‌توان به کمک مجموعه معادله‌ی (۱) نشان داد. در معادله‌ی فوق "o" نماد ضرب هادامارد<sup>۱۴</sup> یا ضرب المانی ماتریسی، W ماتریس وزنی، b بایاس، x ورودی، h خروجی و k شمارنده بازگشت واحد LSTM است. یک واحد LSTM به طور کلی از سه درگاه<sup>۱۵</sup> با نام‌های فراموشی، حالت سلول<sup>۱۶</sup> و ورودی تشکیل شده‌است. این درگاه‌ها به ترتیب با نمادهای  $C$ ,  $f$  و  $i$  نمایش داده شده‌اند. در این معادلات نیز نماینده‌ی تابع فعال‌کننده<sup>۱۷</sup> است. در تحقیق حاضر از بسته‌ی نرم‌افزاری تنسور فلو<sup>۱۸</sup> برای پیاده‌سازی LSTM استفاده شده‌است. همچنین برای تابع فعال‌کننده از تابع سویش<sup>۱۹</sup> مطابق با معادله‌ی (۲) استفاده می‌شود. تابع فعال‌کننده در نظر گرفته شده برای لایه‌ی خروجی تابع خطی است.

8. Swish  
9. Automatic differentiation  
10. Backward propagation  
11. Steepest descent  
12. Unsupervised

1. Long Short-Term Memory  
2. Hadamard product  
3. Gate  
4. Cell-state  
5. Input  
6. Activation function  
7. Tensorflow

پیشنهادی نیازی به لایه‌ی ورودی نداشته و داده‌های ورودی می‌توانند به صورت مستقیم به واحدهای اولین لایه‌ی LSTM ارائه شود. بر همین اساس اولیه لایه از واحدهای LSTM لایه‌ی ورودی نامیده شده و خروجی این لایه به صورت توالی<sup>۸</sup> تنظیم می‌شود. تنظیم فوق تضمین‌کننده‌ی تطابق ابعادی<sup>۹</sup> ورودی لایه‌های نهان<sup>۱۰</sup> خواهد بود. در ادامه تعریف لایه‌های نهان نیز تنظیم خروجی به صورت توالی خواهد بود و تنها در آخرین لایه از واحدهای LSTM تنظیم خروجی به صورت توالی غیرفعال می‌شود. در مقاله‌ی حاضر از واحدهای LSTM دارای حالت کامل<sup>۱</sup> استفاده شده‌است. به این ترتیب بازنشانی<sup>۲</sup> واحدهای LSTM از حالت خودکار خارج شده و در فرآیند آموزش و پس از در زمان تخمین تنها پس از دریافت تمامی داده‌های بردار خروجی واحدهای LSTM بازنشانی می‌شوند. همانطور که پیش‌تر نیز بیان گردید، برای تشکیل شبکه‌های بازگشتی مطلع از فیزیک می‌بایست ضمن استفاده از واحدهای بازگشتی در ساختار شبکه، تعریف تابع از دست‌دهی نیز متناسب با دینامیک مورد بررسی دستخوش تغییر می‌شود. بر همین اساس نرم اول فرم باقی‌مانده<sup>۳</sup> معادله‌ی دینامیک برای شبکه به عنوان تابع از دست‌دهی تعریف می‌شود. تابع از دست‌دهی با توجه به شرایط اولیه‌ی خود و طول آرایه‌ی زمانی (آرایه‌ی ورودی شبکه) نرمال می‌شود.

$$L_k = \frac{|f(\vec{x}^k, \vec{x}^k, x^k, t)|}{m \cdot |f(\vec{x}^0, \vec{x}^0, x^0, t)|} \quad , \quad t = [t_0, \dots, t_m]^T \quad (۸)$$

در معادله‌ی فوق بالاوند نشان‌دهنده‌ی گام حل و نماد  $\langle \rangle$  نشان‌دهنده‌ی میانگین است. در این مرحله لازم به ذکر است با توجه به تعریف انجام شده می‌توان ادعا کرد در صورت اخذ دینامیک توسط شبکه به صورت صحیح خروجی می‌بایست مستقل از گام‌های زمانی ارائه شده در بردار زمان (بردار ورودی) باشد. این در حالی است که ضمن بررسی‌های انجام شده در بخش مطالعات عددی نشان داده می‌شود که این گزاره از صحیح نبوده و با توجه به استفاده از واحدهای LSTM در شبکه‌ی پیشنهادی، کوچک‌ترین گام زمانی مورد استفاده در هنگام آموزش به عنوان رزلوشن غالب در پیش‌بینی‌های شبکه نقش بازی می‌کند. برای آموزش شبکه، با توجه به فرم انتخابی برای تابع از دست‌دهی، نیازی به تأمین داده‌های آموزش نیست

در این مرحله فرض کنید رابطه‌ی دلخواه و عمومی دینامیک به صورت زیر مد نظر باشد:

$$f(\dot{x}, \dot{x}, x, t) = 0 \quad (۵)$$

در این حالت با بازنویسی معادله‌ی دینامیک در فرم باقی‌مانده<sup>۱</sup> می‌توان تابع هدف شبکه را تعریف کرد. این تابع در ادبیات پژوهشی معمولاً با عنوان تابع از دست‌دهی<sup>۳</sup> شناخته می‌شود و در فرآیند آموزش شبکه کمینه‌سازی این معادله مدنظر قرار می‌گیرد.

$$L = \|f(\dot{x}, \dot{x}, x, t)\|_p \quad (۶)$$

ذکر این نکته لازم است که در تعریف تابع (۶) امکان انتخاب نرم- $p$  به صورت دلخواه مجاز است اما استفاده از نرم‌های اول و دوم در تعریف توابع از دست‌دهی در ادبیات پژوهشی متداول‌تر است. استفاده از این روش و همگرایی شبکه تحت تعریف فوق به معنای مقید کردن شبکه‌ی عصبی با قواعد دینامیکی است و می‌توان انتظار داشت شبکه نه تنها به عنوان یک میان‌یاب، بلکه به عنوان یک برون‌یاب نیز رفتار قابل قبولی از خود ارائه داده و توانایی ارائه‌ی تقریب مطلوبی از دینامیک سامانه خارج از نقاط آموزش نیز داشته باشد.

### معماری شبکه عصبی مطلع از فیزیک بازگشتی

به منظور بررسی راحت‌تر و نگارش ملموس‌تر، در ادامه برای ارائه‌ی دینامیک از فرم فضای حالت استفاده می‌شود. بر همین اساس معادله‌ی عمومی دینامیک در فرم فضای حالت به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\dot{\vec{x}}(t) = f(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (۷)$$

در این معادله  $u$  نماینده‌ی بردار کنترل است. برای آموزش شبکه از فرض حالت‌های سامانه و ورودی‌های کنترلی به تعداد  $m > 1$  گام اندازه‌گیری استفاده شده‌است. به کمک معماری پیشنهادی در مقاله‌ی حاضر امکان استخراج معادلات خودمختار از سامانه (معادلات فارغ از زمان) و رفتار سامانه‌ی تحت ورودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیگنال ورودی می‌تواند به دو صورت تابع زمانی (غیر خودگردان<sup>۴</sup>) و یا فارغ از آن<sup>۵</sup> و به صورت تابعی از حالات سامانه فرض می‌شود. در این حالت ورودی شبکه بردار زمانی و خروجی شبکه حالت‌ها خواهد بود.

برای ساخت شبکه از لایه‌های LSTM بهره گرفته شده‌است. با توجه به وجود درگاه ورودی<sup>۶</sup> در واحدهای LSTM شبکه‌ی

9. Dimension  
10. Hidden layers  
11. Stateful  
12. Reset  
13. Residual

1. Residual form  
2. Objective function  
3. loss  
4. Nonautonomous  
5. Autonomous  
6. States  
7. Input gate  
8. Sequence

## (علمی - پژوهشی)

سیدحسین پورتاکدوست، امیرحسین خدابخش

به منظور بررسی توانمندی پیش‌بینی شبکه، پس از همگرایی پاسخ رفتار حاصل از شبکه با پاسخ بدست آمده از انتگرال گیررونکه-کاتا<sup>۴</sup> مرتبه ۴-۵ با گام زمانی انطباقی<sup>۵</sup> استفاده می‌شود. همچنین برای بررسی توانمندی شبکه در اکتساب رفتار دینامیک از دو معیار مسیر در صفحه‌ی فاز<sup>۶</sup> و جذر میانگین مربعات خطا<sup>۷</sup> استفاده شده‌است.

## مطالعه‌ی عددی

برای ایجاد امکان مقایسه میان نتایج بدست آمده برای تمامی دینامیک‌های ارائه شده در این مقاله از یک شبکه با عمق یکسان استفاده شده‌است. مشخصات این شبکه در جدول ۱ ارائه شده‌است.

جدول ۱: مشخصات شبکه‌ی عمیق بازگشتی مطلع از فیزیک

تعداد پارامترهای مورد آموزش	تعداد واحد LSTM در هر لایه	تعداد لایه‌های نهان	تعداد واحد LSTM در ورودی	شبکه
۸۰۵۱	۱۰	۹	۱۰	شبکه

با انتخاب مناسب پارامترهای ارائه شده در معادله‌ی (۷) می‌توان رفتارهای متنوعی را از معادله‌ی دافینگ در صفحه‌ی فاز انتظار داشت. بررسی با حالت ساده‌ای از معادله‌ی دافینگ آغاز می‌شود. در صورت انتخاب پارامترهای ارائه شده به ترتیب  $\delta, \alpha, \beta, \gamma$  و  $\theta$  برابر با  $0/3, -1, 1, 0$ ، صفر و صفر، با اختیار کردن شرایط اولیه‌ی  $x_0 = 1$  و  $\dot{x}_0 = 0$  معادله‌ی دافینگ رفتار حول یک جاذب پایدار را از خود نشان می‌دهد. این رفتار ساده به عنوان گام نخست از پژوهش حاضر در نظر گرفته شده و به بررسی رفتار شبکه حول آن پرداخته می‌شود. همانطور که گفته شد شبکه‌ی پیشنهادی بدون داشتن هیچ داده‌ای از خروجی سامانه قابلیت تشخیص رفتار دینامیک را به کمک معادلات دینامیک خواهد داشت. این در حالی است که در حالت خودگردان<sup>۸</sup> معادلات دینامیکی دارای پاسخ بدیهی صفر هستند. برای پرهیز از پاسخ بدیهی معادلات دینامیکی لازم است شرایط اولیه به صورت قید آغازین به شبکه اعمال گردد. بر همین اساس پس از تشکیل شبکه در ابتدا با مفروض داشتن شرایط اولیه آموزش به صورت نظارت شده به عنوان شرایط اولیه به شبکه اجبار می‌گردد و پس از آن حفظ این شرایط به عنوان قید بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

و به طور کلی می‌توان گفت شبکه‌ی حاضر از نوع بدون نظارت است. به این ترتیب در هر گام آموزش، شبکه به کمک رابطه‌ی دینامیک نگاشت ارائه شده در معادله‌ی (۹) را می‌آموزد:

$$\vec{t} \mapsto \vec{x}(t) \quad (9)$$

برای آموزش شبکه از بهینه‌ساز ادم<sup>۱</sup> استفاده شده‌است. بهینه‌ساز ادم را می‌توان نسخه‌ی بهبودیافته‌ای از بهینه‌ساز نزول گرادیانی تصادفی<sup>۲</sup> دانست. در این بهینه‌ساز از نرخ آموزش<sup>۳</sup> یکصدم استفاده شده‌است.

انتخاب گام زمانی با توجه به دینامیک مورد مطالعه صورت می‌گیرد و با توجه به تطابق خروجی انتگرال‌گیری با گام زمانی تطبیقی و ثابت این انتخاب توجیه می‌گردد. لازم به ذکر است روش انتخاب گفته شده قابل معادل‌سازی با تعیین ثابت زمانی سریع‌ترین قطب در دینامیک مورد بررسی است. متناسب با قضیه‌ی نیکوئیست-شانون<sup>۸</sup> گام زمانی آموزش و تست شبکه در نتایج ارائه شده متناسب با دو برابر نرخ نایکوئیست<sup>۹</sup> و یا به عبارت دیگر چهار برابر سریع‌ترین فرکانس موجود در دینامیک انتخاب شده‌است. برای معادلات دینامیکی با رفتار آشوبناک این انتخاب با توجه به تناوب میانگین نوسان انتخاب شده‌است.

## نوسان گر دافینگ (Duffing)

اولین دینامیک مورد بررسی در این مقاله نوسان گر دافینگ است. معادله‌ی دافینگ یک معادله‌ی غیرخطی از مرتبه‌ی دوم است که در حالت غیرخودگردان می‌تواند دامنه‌ی وسیعی از رفتارهای غیرخطی را ارائه دهد. به طور کلی معادله‌ی نوسان گر دافینگ را می‌توان مطابق با معادله‌ی ذیل دانست:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) + \theta u(t) \quad (10)$$

8. Nyquist-Shannon

9. Nyquist rate

10. Attractor

11. Autonomous

1. Adam

2. Stochastic gradient descent

3. Learning-rate

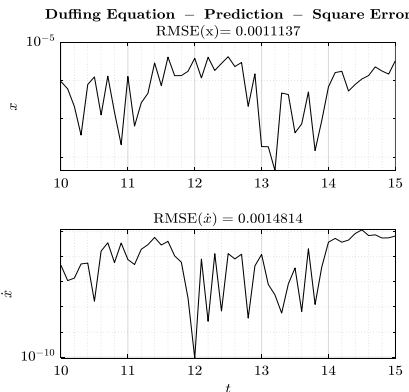
4. Runge-Kutta

5. Adaptive

6. Phase-space response curve

7. Root mean square error

موفقیت شبکه در تخمین معادله‌ی دافینگ در حالی است که پایدار بودن رفتار نقطه‌ی تعادل و خودگردان بودن سامانه می‌تواند در این موفقیت تأثیرگذار بوده باشد. بر همین اساس در گام بعد سامانه از حالت خودگردان خارج می‌شود.

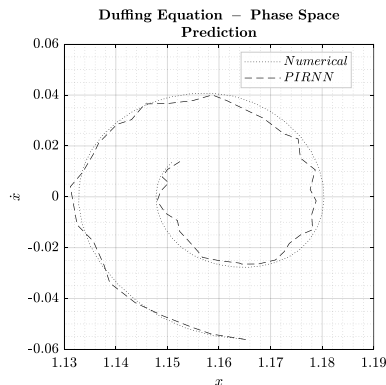


شکل (۳): خطای پیش‌بینی شبکه در معادله‌ی دافینگ با جاذب پایدار

برای خارج کردن معادله از حالت خودگردان از سیگنال ورودی استفاده خواهد شد. در گام نخست برای بررسی تأثیر پارامترهای وابسته به زمان در پاسخ شبکه از ورودی اغتشاشی برای تحریک سامانه استفاده می‌شود. برای اعمال فرمان اغتشاشی به سامانه از فرآیند تصادفی اورنستاین-یورنیک<sup>۲</sup> استفاده شده‌است.

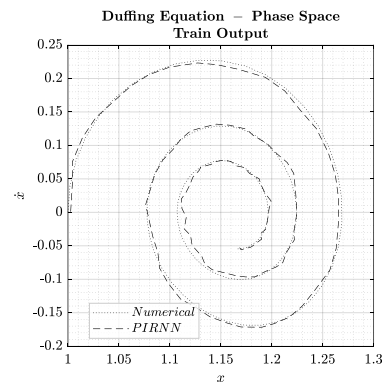
$$\dot{u} = -\frac{u}{\tau} + \epsilon\sqrt{2/\tau}w(t) \quad (11)$$

در معادله‌ی فرآیند تصادفی اورنستاین-یورنیک (معادله‌ی (۱۱))  $w(t)$  نشان‌دهنده‌ی نویز سفید،  $\epsilon$  ضریب دامنه و  $\tau$  نشان‌دهنده‌ی همبستگی زمانی سیگنال است. برای بررسی حاضر مقدار  $\epsilon$  و  $\tau$  به ترتیب برابر با  $0/5$  و  $5$  انتخاب می‌شود. با اعمال این سیگنال انتظار می‌رود رفتار معادله‌ی دافینگ حول نقطه‌ی تعادل خود با تغییر زیادی روبه‌رو نشود و به این ترتیب حساسیت شبکه به اضافه کردن ورودی زمانی مورد بررسی قرار گیرد.



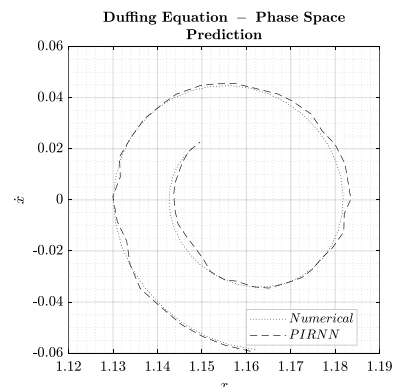
شکل (۴): پیش‌بینی شبکه در معادله‌ی دافینگ با جاذب پایدار و ورودی زمانی

پس از ارضای شرایط اولیه آموزش شبکه به صورت نظارت نشده ادامه داده می‌شود. در این حالت شبکه برای کاهش تابع از دست‌دهی مجاب به ارضاء معادلات دینامیک سامانه می‌گردد و به این ترتیب به گام به گام به پاسخ دینامیک مورد نظر همگرا می‌شود. در این مرحله بردار زمان (بردار آموزش) به صورت بردار زمانی در بازه‌ی صفر تا ده در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب پس از گذشت ۲۵۰۰ دوره‌ی آموزش<sup>۱</sup>، خروجی شبکه مطابق با شکل ۱ موفق به دریافت دینامیک شبکه می‌گردد. در این حالت مقدار تابع از دست‌دهی شبکه با در نظر گرفتن  $x$  به عنوان خروجی اصلی به مقدار  $0/00223$  می‌رسد.



شکل (۱): خروجی آموزش شبکه در معادله‌ی دافینگ با جاذب پایدار

مطابق با مطالب گفته شده در بخش‌های پیشین انتظار می‌رود شبکه پس از هم‌گرایی به میزان مطلوب، نه تنها به صورت میان‌یاب، بلکه به عنوان یک برون‌یاب نیز رفتار قابل قبولی از خود نشان دهد. بر همین اساس در گام بعد انتهای بردار زمان (بردار ورودی) تا مقدار ۱۵ افزایش می‌یابد. با افزایش بردار زمانی پیش‌بینی رفتار به کمک شبکه در شکل ۲ نشان داده شده‌است. همچنین رفتار تابع از دست‌دهی و مقادیر آن برای بازه‌ی پیش‌بینی مطابق با شکل ۳ است. مطابق با نتایج بدست آمده می‌توان گفت شبکه با موفقیت رفتار دینامیک را پیش‌بینی کرده‌است.

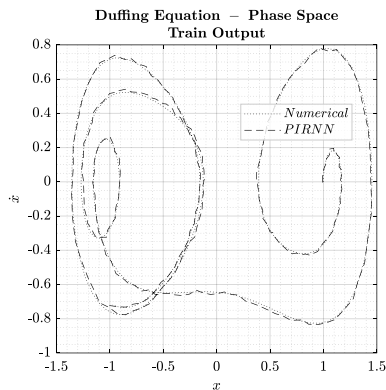


شکل (۲): پیش‌بینی شبکه در معادله‌ی دافینگ با جاذب پایدار

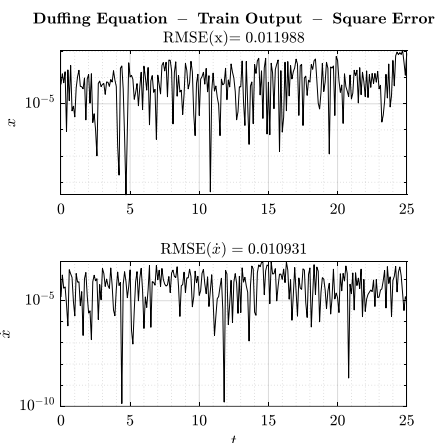
## (علمی - پژوهشی)

سیدحسین پورتاکدوست، امیرحسین خدابخش

می‌شود. به طور مشخص در معادله‌ی دافینگ آشوبناک تعامل ترم سینوسی وابسته به زمان و ترم‌های مشتق زمانی به روابط ریاضی پیچیده‌تری برای معادل‌سازی نیاز دارند و بر همین اساس در تشکیل شبکه نیازمند جستجوی بیش‌تر فضای طراحی و در نتیجه از لحاظ محاسباتی هزینه‌ی بیش‌تری خواهند داشت. با دو برابر کردن دوره‌های آموزش برای شبکه رفتار دینامیک و تابع از دست‌دهی به ترتیب مطابق با شکل ۷ و شکل ۸ می‌گردد.



شکل (۷): پاسخ شبکه پس از ۵۰۰۰ دوره آموزش

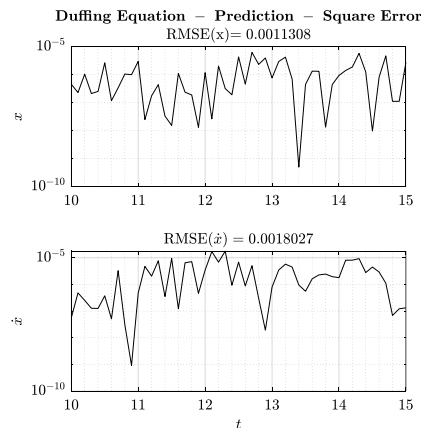


شکل (۸): خطای شبکه پس از ۵۰۰۰ دوره آموزش

علی‌رغم موفقیت شبکه در اخذ دینامیک معادله‌ی دافینگ افزایش چشم‌گیر نیاز محاسباتی و افزایش مقدار تابع از دست‌دهی به میزان یک مرتبه محسوس است. در گام بعد ضمن در نظر گرفتن ورودی اغتشاشی مشابه حالت قبل توانمندی شبکه در این حالت برای پیش‌بینی رفتار دینامیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۹ نشان‌دهنده‌ی مقدار تابع از دست‌دهی شبکه در داده‌های آموزش، شکل ۱۰ و شکل ۱۱ نیز به ترتیب نشان‌دهنده‌ی خطای شبکه پس از آموزش، مسیر تخمین زده شده در فضای فاز و خطای این پیش‌بینی است.

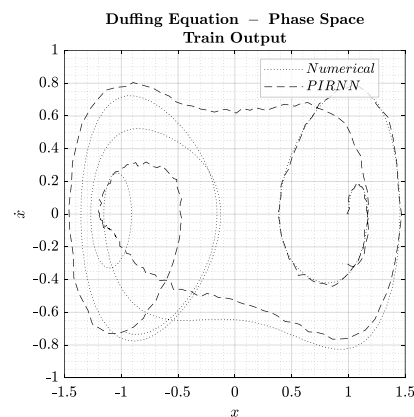
افزودن ورودی اغتشاشی به میزان قابل توجهی خطای تخمین را افزایش داده‌است همچنین در این حالت بروز فاصله

مطابق با نتایج ارائه شده در شکل ۴ و شکل ۵ شبکه به خوبی توانسته است رفتار دینامیک را پیش‌بینی کند. این در حالی است که اضافه کردن ورودی زمانی به شبکه منجر به افزایش جزئی مقدار تابع از دست‌دهی شده‌است که با توجه به استفاده از بهینه‌ساز تصادفی نتیجه‌ی الزام‌آوری از آن نمی‌توان دریافت کرد.



شکل (۵): خطای پیش‌بینی با جاذب پایدار و ورودی زمانی

بر همین اساس در گام بعد معادله‌ی دافینگ بر روی رفتار آشوبناک تنظیم شده‌است. در این حالت انتظار می‌رود در صورتیکه غیرخودگردان کردن سامانه منجر به رفتار نامطلوب در شبکه‌های بازگشتی مطلع از فیزیک شود این پدیده خود را در رفتار آشوبناک نمایان کند. برای دریافت رفتار آشوبناک از معادله‌ی دافینگ کافی است پارامترهای انتخابی به ترتیب  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  و  $\theta$  برابر با  $1/3$ ،  $-1$ ،  $1$ ،  $0/4$  و صفر، اختیار می‌گردد. مجدداً با انتخاب شرایط اولیه‌ی  $x_0 = 1$  و  $\dot{x}_0 = 0$  معادله‌ی دافینگ یک رفتار آشوبناک را حول دو نقطه‌ی تعادل در فضای حالت ارائه می‌دهد. ابتدا سیگنال ورودی اغتشاشی در نظر گرفته نشده و رفتار شبکه همانند قبل پس از ۲۵۰۰ دوره‌ی آموزش مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۶ نشان‌دهنده‌ی رفتار شبکه در حالت آشوبناک است.



شکل (۶): پاسخ شبکه پس از ۲۵۰۰ دوره آموزش

همانطور که از شکل ۶ نیز پیداست، با حرکت به سمت دینامیک آشوبناک، پیچیدگی دینامیک مورد بررسی بیش‌تر

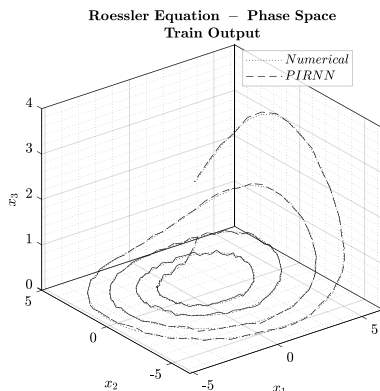
### نوسان گر روسلر<sup>۱</sup>

در دومین گام مقاله‌ی حاضر به بررسی اثر افزایش بعد فضا پرداخته شده است. برای این منظور از نوسان گر روسلر [۱۰] استفاده می‌شود. دینامیک روسلر نیز با توجه به پارامترهای تنظیم شده برای آن می‌تواند رفتار پریودیک ساده و آشوبناک را از خود نشان دهد. معادلات حاکم بر این دینامیک در فرم فضای حالت به صورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + c_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = c_2 + x_3(x_1 - c_3) + u(t) \end{cases} \quad (12)$$

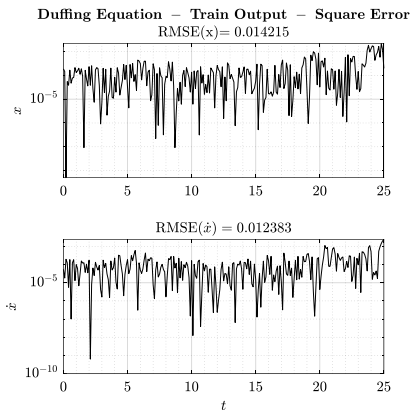
پارامترهای معادله‌ی مذکور به ترتیب برای  $c_1$ ،  $c_2$  و  $c_3$  برابر با ۰٫۲، ۰٫۰، ۲٫۰ و ۵٫۷ انتخاب می‌شود. با شرایط تعیین شده این نوسان گر دارای یک سیکل حدی پایدار خواهد بود. این نوع دینامیک در ادبیات پژوهشی با عنوان نوسان گر خود- پایا نیز شناخته می‌شود. با مفروض داشتن یافته‌های بخش پیش به بررسی اثر افزایش بعد در رفتار شبکه پرداخته شده است. ورودی اغتشاشی همانند مثال قبل در نظر گرفته شده و شرایط اولیه برای هر سه حالت معادله برابر یا یک فرض می‌شود. به این ترتیب پس از ۲۵۰۰ دوره آموزش، شبکه قادر خواهد بود مطابق با نمودارهای ارائه شده در شکل ۱۲ و شکل ۱۳ دینامیک نوسان گر روسلر را با خطای نسبتاً کمی اکتساب کند.

دینامیک روسلر دارای یک سیکل حدی پایدار در فضای فاز است و بر همین اساس انتظار می‌رود با دریافت پیش‌بینی شبکه از آینده‌ی سامانه در صورتی که افزایش ابعاد دینامیک برای شبکه مشکلی ایجاد نکرده باشد تخمین نسبتاً دقیقی از رفتار سامانه باشد. مقایسه‌ی پیش‌بینی شبکه از رفتار دینامیک و خطای تخمین در شکل ۱۴ و شکل ۱۵ ارائه شده است.

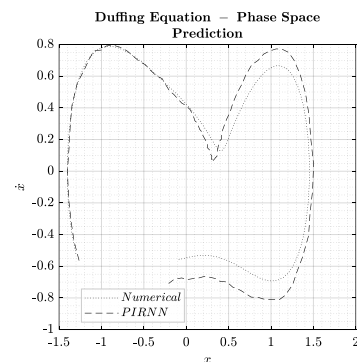


شکل (۱۲): اکتساب دینامیک روسلر توسط شبکه با ورودی اغتشاشی

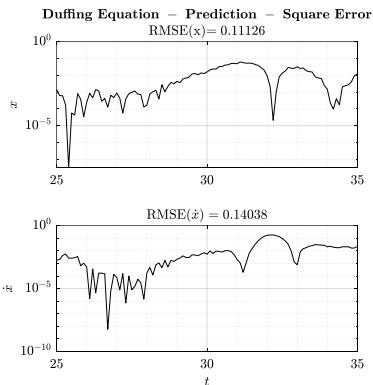
تدریجی میان رفتار دینامیک و تخمین شبکه واضح است. به طور حتم با توجه به آشوبناک بودن رفتار سامانه این اختلاف به سرعت می‌تواند به عدم صحت تخمین از سامانه بینجامد. نکته‌ی قابل تأمل باقی ماندن خطای تخمین در محدوده‌ی قابل قبول تا ۵۰ گام زمانی در آینده است و این خود نشان‌دهنده‌ی لزوم بررسی‌های بیش‌تر در خصوص تعیین متغیرهای موثر بر افق دقت شبکه می‌باشد. در ادامه به بررسی دینامیک روسلر پرداخته شده است.



شکل (۹): خطای شبکه پس از اعمال ورودی اغتشاشی



شکل (۱۰): پیش‌بینی شبکه پس از اعمال ورودی اغتشاشی



شکل (۱۱): خطای پیش‌بینی شبکه پس از اعمال ورودی اغتشاشی

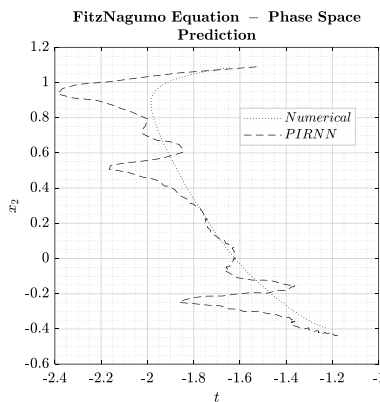
## (علمی - پژوهشی)

سیدحسین پورتاکدوست، امیرحسین خدابخش

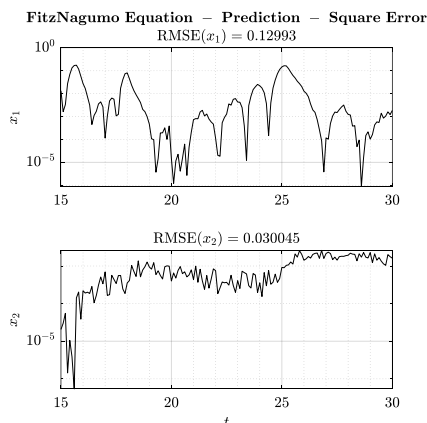
دینامیک دارای رویه‌ی تعویض<sup>۳</sup> بوده و بررسی آن به ما امکان مطالعه‌ی توانمندی شبکه در مدل‌سازی دینامیک‌های هم‌رده با آن را خواهد داد. معادله‌ی نوسان‌گر فیتزهیو ناگومو مطابق با معادله‌ی زیر قابل بیان است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \frac{x_1^3}{3} - x_2 + I_0 + u(t) \\ \dot{x}_2 = c_1 \cdot (x_1 + c_2 - c_3 x_2) \end{cases} \quad (13)$$

با انتخاب پارامترهای  $I_0$  تا  $c_3$  به ترتیب برابر با  $0/25$ ،  $0/1$ ،  $0/7$  و  $0/8$  و اعمال ورودی اغتشاشی مشابه با قسمت قبل و آموزش شبکه برای  $5000$  دوره‌ی پیش‌بینی شبکه از دینامیک نوسان‌گر فیتزهیو ناگومو مطابق با شکل ۱۶ و شکل ۱۷ می‌باشد.



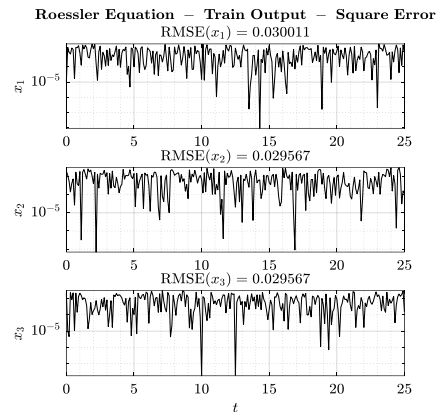
شکل (۱۶): پیش‌بینی شبکه از دینامیک فیتزهیو ناگومو



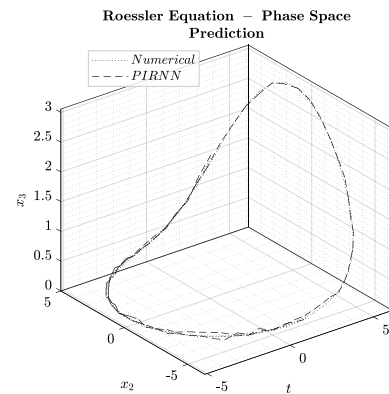
شکل (۱۷): خطای پیش‌بینی دینامیک فیتزهیو ناگومو

نتایج بدست آمده ناظر بر ضعف شبکه‌ی پیشنهادی در تخمین رفتار نوسان‌گر فیتزهیو ناگومو است. علت این موضوع را می‌توان در مشخصه‌های زیادی نظیر آموزش کافی در دو سوی رویه‌ی تعویض جستجو کرد و راهکارهایی نظیر تقسیم‌بندی شبکه برای مدیریت خروجی در دو سوی رویه با شبکه‌های مجزاء

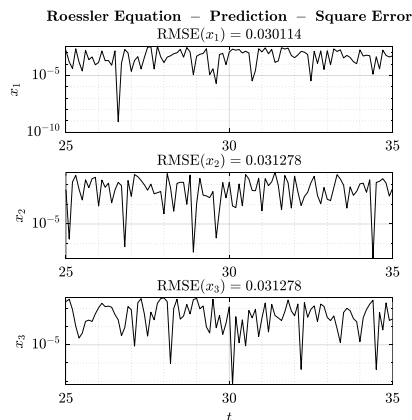
3. Switching surface



شکل (۱۳): خطای آموزش دینامیک روسلر



شکل (۱۴): پیش‌بینی دینامیک روسلر به کمک شبکه



شکل (۱۵): خطای تخمین دینامیک روسلر

نوسان‌گر فیتزهیو- ناگومو<sup>۱</sup>

آخرین دینامیک مورد بررسی در این مقاله نوسان‌گر فیتزهیو ناگومو خواهد بود. این نوسان‌گر از رده‌ی نوسانگرهای دارای سیکل آرامش<sup>۴</sup> بوده و اولین بار برای مدل‌سازی حالت فعال شدن نرون‌ها و زمان استراحت آن‌ها بعد از فعال شدن پیشنهاد شد. این

1. FitzHugh-Nagumo
2. Relaxation oscillator

- [2] H. Voss, M. Bünner, and M. Abel, "Identification of continuous, spatiotemporal systems," *Physical Review E*, vol. 57, no. 3, p. 2820, 1998.
- [3] M. Quade, M. Abel, K. Shafi, R. K. Niven, and B. R. Noack, "Prediction of dynamical systems by symbolic regression," *Physical Review E*, vol. 94, no. 1, p. 012214, 2016.
- [4] M. Schmidt and H. Lipson, "Distilling free-form natural laws from experimental data," *science*, vol. 324, no. 5923, pp. 81-85, 2009.
- [5] J. Pathak, B. Hunt, M. Girvan, Z. Lu, and E. Ott, "Model-free prediction of large spatiotemporally chaotic systems from data: A reservoir computing approach," *Physical review letters*, vol. 120, no. 2, p. 024102, 2018.
- [6] J. Pathak, Z. Lu, B. R. Hunt, M. Girvan, and E. Ott, "Using machine learning to replicate chaotic attractors and calculate Lyapunov exponents from data," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 27, no. 12, p. 121102, 2017.
- [7] I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville, and Y. Bengio, *Deep learning* (no. 2). MIT press Cambridge, 2016.
- [8] R. S. Zimmermann and U. Parlitz, "Observing spatio-temporal dynamics of excitable media using reservoir computing," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 28, no. 4, p. 043118, 2018.
- [9] Z. Lu, B. R. Hunt, and E. Ott, "Attractor reconstruction by machine learning," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 28, no. 6, p. 061104, 2018.
- [10] R. Cestnik and M. Abel, "Inferring the dynamics of oscillatory systems using recurrent neural networks," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 29, no. 6, p. 063128, 2019.
- [11] B. A. Pearlmutter, "Learning state space trajectories in recurrent neural networks," *Neural Computation*, vol. 1, no. 2, pp. 263-269, 1989.
- [12] K.-i. Funahashi and Y. Nakamura, "Approximation of dynamical systems by continuous time recurrent neural networks," *Neural networks*, vol. 6, no. 6, pp. 801-806, 1993.
- [13] C. A. Bailer-Jones, D. J. MacKay, and P. J. Withers, "A recurrent neural network for modelling dynamical systems," *network: computation in neural systems*, vol. 9, no. 4, pp. 531-547, 1998.
- [14] D. Svozil, V. Kvasnicka, and J. Pospichal, "Introduction to multi-layer feed-forward neural networks," *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, vol. 39, no. 1, pp. 43-62, 1997.
- [15] M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, "Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 378, pp. 686-707, 2019.
- [16] H. Gomi and M. Kawato, "Neural network control for a closed-loop system using feedback-error-learning," *Neural Networks*, vol. 6, no. 7, pp. 933-946, 1993.
- [17] J. Sarangapani, *Neural network control of nonlinear discrete-time systems*. CRC press, 2018.

را پیشنهاد داد اما قدر مسلم آن است که شبکه‌ی حاضر بدون بهبود توانمندی مدلسازی دینامیک‌های دارای رویه‌ی تعویض را نداشته و نیاز است در مطالعات آتی بهبودهای ممکن برای رفع این مشکل مورد مطالعه قرار گیرد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی شبکه‌های بازگشتی مطلع از فیزیک برای معادل‌سازی دینامیک‌های غیرخطی به کمک شبکه‌های عصبی پرداخته شد. بر این اساس در ابتدا به تبیین شبکه‌های مطلع از فیزیک و چگونگی امکان ترکیب آن‌ها با شبکه‌های بازگشتی پرداخته شد. به کمک شناختی که از شبکه‌های مطلع از فیزیک و شبکه‌های بازگشتی حاصل گردید، معماری شبکه‌ی عمیقی جهت آموزش دینامیک‌های غیرخطی پیشنهاد شد و طی آموزش با دینامیک‌های مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت.

مطابق با نتایج بدست آمده می‌توان جمع‌بندی نتایج را به این شرح دانست. شبکه‌ی پیشنهادی در تقریب دینامیک‌های غیرخطی در صورتی که در فضای فاز رویه‌ی تعویضی مفروض نباید به خوبی قادر به تخمین دینامیک سامانه خواهند بود و متناسب با نیاز و زمان آموزش می‌توان دقت آن‌ها را به دقت دینامیک نزدیک نمود. علاوه بر این شبکه‌ی پیشنهادی علاوه بر تابعیت‌های خودگردان در توابع غیرخطی، توانمندی دریافت تابعیت‌های غیرخودگردان و وابسته به زمان را دارا بوده و با صرف هزینه‌ی محاسباتی می‌توان خروجی را به میزان مطلوب به دینامیک مورد نظر نزدیک کرد. این در حالی است که در صورت وجود رویه‌ی تعویض در فضای فاز شبکه‌ی پیشنهادی به صورت صرف عملکرد ضعیفی را از خود نشان می‌دهد و بررسی علل این موضوع و راهکارهای احتمالی حل آن نیازمند مطالعه‌ی بیشتر است. شبکه‌های عصبی ترکیبی متناهی از توابع با ضرایب مجهول هستند. بر همین اساس تعداد لایه‌ها، نحوه‌ی اتصال و توابع فعال‌سازی در کنار فرآیندها در رفتار تخمین نقش به‌سزایی خواهد داشت. با توجه به نتایج بدست آمده در ادامه‌ی پژوهش حاضر می‌توان به بررسی دقیق‌تر تخمین دینامیک به کمک شبکه‌های مطلع از فیزیک پرداخت و با مطالعه‌ی موارد ذکر شده درک جامع‌تری از محدودیت‌ها و توانمندی‌های این رده از شبکه‌ها برای استفاده‌های کاربردی بدست آورد.

## مراجع

- [1] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer Science & Business Media, 2013.

[19] S. Hochreiter and J. Schmidhuber, "Long Short-Term Memory," *Neural Computation*, vol. 9, no. 8, pp. 1735-1780, 1997, doi: 10.1162/neco.1997.9.8.1735.

[18] F. Arnold and R. King, "State-space modeling for control based on physics-informed neural networks," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 101, p. 104195, 2021.