



(علمی - پژوهشی)

# تحلیل انتشار صوت در شیپوره با در نظر گرفتن اثرات غیر خطی

اصغر نجفی<sup>۱\*</sup>

۱- پژوهشگاه نیرو، گروه تجهیزات دوار مکانیکی،

تهران، ایران، کدپستی: ۱۴۶۸۶۱۳۱۱۳.

\* استادیار (نویسنده پاسخگو).

ایمیل: [anajafi@nri.ac.ir](mailto:anajafi@nri.ac.ir)

با توجه به کاربردهای اخیر تولید امواج قوی صوتی از ترموآکوستیک تا تمیزکاری صوتی لازم است تا حل معادلات قبلی انتشار صوت که بر مبنای خطی سازی آنها بود و برای کاربردهای معمولی توسعه یافته بود اصلاح گردد. در این مقاله ابتدا معادلات انتشار صوت در یک شیپوره استخراج می‌شود. این کار با نوشتن معادلات بقای اندازه حرکت و بقای جرم آغاز می‌شود و در ادامه با تعریف تابع پتانسیل سرعت و جاگذاری آن در معادلات به یک معادله دیفرانسیل جزئی ختم می‌شود. با انتقال این معادله به حوزه فرکانس مسئله به یک معادله با شرایط مرزی تبدیل می‌شود. با اعمال شرایط مرزی یک شیپوره باز منحنی‌های پاسخ فرکانسی استخراج می‌شوند. این معادلات با استفاده از روش رانگ کوتا قابل حل هستند. از آنجایی که برای شیپوره‌های نمایی با فرض خطی بودن انتشار صوت پاسخ تحلیل موجود است، نتایج در این حالت اعتبارسنجی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: انتشار موج، شیپوره صوتی، امواج ماکروسونیک، ترموآکوستیک

## Analysis of Sound Propagation in the Horn Considering Nonlinear Effects

Due to the recent applications of generating strong sound waves from thermo-acoustics to acoustic cleaning, it is necessary to modify the previous equations of sound propagation, which were based on linearization assumptions and developed for ordinary applications. In this paper, the sound propagation equations in a horn are first extracted. This starts with writing the equations of momentum and mass conservation and then ends with defining the potential velocity function and placing it in the partial differential equations. By transforming this equation to the frequency domain, the problem becomes a boundary value problem. Frequency response curves are extracted by applying the boundary conditions. These equations can be solved using the Range Kutta method. Since there is an analytical response for exponential horns assuming the sound propagation is linear, the results are validated in this case

**Keywords:** Wave propagation, Sonic horn, Macrosonic waves, Thermoacoustic

A. najafi<sup>1\*</sup>

1- Niro Research Institute,  
Department of Mechanical Rotating  
Equipment, Tehran, IRAN

\* Assistant Professor (Corresponding  
Author)

Email: [anajafi@nri.ac.ir](mailto:anajafi@nri.ac.ir)

مقدمه

امروزه تولید صوت قوی دارای کاربردهای فراوانی مانند تمیزکاری صوتی [۲۵-۲۸]، ترموآکوستیک [۲۴، ۲۹-۳۱]، تولید امواج ماکروسونیک [۳۵-۳۲] و غیره می‌باشد. در بسیاری از این کاربردها از شیپوره‌های صوتی استفاده می‌شود. شیپوره صوتی نقش مهمی در افزایش دامنه و تنظیم فرکانس مطلوب اصوات در کاربردهای خاص آن‌ها دارد. عملکرد اصلی یک شیپوره صوتی برای تقویت صوت، افزایش تطابق مقاومت صوتی بین منبع و جو بیرونی می‌باشد.

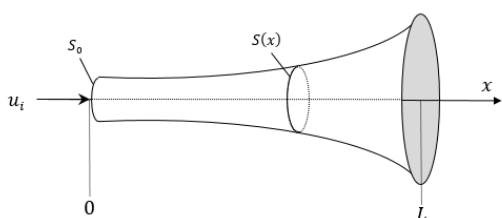
در تحلیل انتشار صوت در شیپوره‌های صوتی معمولاً فرض خطی بودن انتشار صوت صورت می‌گیرد. این فرض بر این مبنا استوار است که دامنه تغییرات فشار نسبت به فشار مطلق جو کوچک و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد. معادله وبستر که سال‌ها برای تحلیل انتشار صوت در شیپوره‌ها استفاده می‌شد بر این اساس استخراج شده است [۳۶-۳۸]. اما در تولید اصوات قوی این فرض دارای خطا می‌باشد و پدیده‌هایی نظیر شوک در نظر گرفته نمی‌شوند. با افزایش دامنه صوت نقش جملات غیرخطی در معادله انتشار صوت پررنگ‌تر می‌شود. در صورتی که انرژی صوتی منجر به شوک نشود می‌توان از روش‌های تقریبی و ساده شده حل غیرخطی جهت شناسایی ماهیت موج‌های ایستاده در شیپوره‌ها یا رزوناتورها استفاده کرد. این روش‌ها شامل روش مقیاس‌های چندگانه یا روش اغتشاشات است. برای مثال بکوئین<sup>۲</sup> و مورفی<sup>۳</sup> از روش اغتشاشات برای تحلیل غیرخطی ضعیف موج منتشر شده در یک شیپوره نمایی استفاده کردند [۳۹]. آن‌ها برای اعتبارسنجی مدل و روش تحلیل خود از نتایج تجربی استفاده کردند. همچنین مورتل<sup>۴</sup> و همکاران با استفاده از روش اغتشاشات موج‌های ایستاده ماکروسونیک را در رزوناتورهای بسته مورد مطالعه قرار داده‌اند [۴۰]. تمام این مطالعات زمانی درست هستند که جملات غیرخطی زیاد قوی نیستند و لزوماً شوکی در موج ایجاد نمی‌شود. اما زمانی که انرژی صوت بالاتر رود این فرضیات دیگر صادق نیستند. برای مثال در کاربردهایی که مربوط به استفاده از موج‌های ماکروسونیک در پمپ‌های صوتی است شدت صوت در حد ایجاد شوک صوتی بالاست [۴۱]. در این خصوص می‌توان به کار لینسکی<sup>۵</sup> و همکاران از شرکت ماکروسونیکس اشاره کرد که انتشار موج صوتی را در داخل یک نوسانگر صوتی بسته که با شدت مشخص تکان داده می‌شد را بررسی کردند [۴۲]. آن‌ها در مدل خود موج را کاملاً غیرخطی و بدون تقریب تیلور حل کردند.

در استفاده از انفجار در تمیزکاری صوتی نیز دامنه صوتی بسیار بالا و در حد تولید شوک صوتی است. همچنین در سایر روش‌های تمیزکاری صوتی دامنه صوت تا حد امکان باید بالا باشد. اما در این کاربردها بر خلاف ماکروسونیکس شیپوره باز است و باید معادلات با شرایط مرزی متفاوت حل شوند. تنها در این صورت است که می‌توان به حد نهایی صوت ایجاد شده در فرایندهای خودتحریک تولید صوت در کاربردهای آن پی برد.

در این مقاله با در نظر گرفتن معادلات غیرخطی انتشار صوت در یک شیپوره صوتی پاسخ فرکانسی آن بدست آمده‌است. تفاوت کار فعلی به مقالاتی که در زمینه انتشار صوت ماکروسونیکس است در باز بودن شیپوره و همچنین نوع تحریک است. بر خلاف امواج ماکروسونیکس که با تحریک ارتعاشی محفظه ایجاد می‌شود، در یک شیپوره صوتی نوسانات حجمی هوای ورودی عامل تحریک است. شکل‌های مختلف از انواع شیپوره بررسی شده و عملکرد آنها در مودهای مختلف بررسی می‌شود.

تشریح مدل و معادلات اصلی

یک شیپوره مانند شکل ۱ در نظر بگیرید. فرض کنید که شرایط میدان تک بعدی صوتی برای این شیپوره برقرار است. بنابراین سه معادله برای توصیف حرکت گاز لزوج در شیپوره آکوستیکی لازم است: ۱- معادله پایستگی جرم، ۲- معادله پایستگی تکانه، ۳- معادله حالت.



شکل (۱): شیپوره با سطح مقطع متغیر

معادله پایستگی جرم برای شیپوری که شعاع آن در راستای محور متغیر است به شکل زیر نوشته شده‌است [۴۳، ۴۲]:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

در ادامه به معرفی نمادها می‌پردازیم:  $M$  مقدار جرم در واحد طول،  $F$  جریان جرم عبوری از مقطعی از شیپوره به شعاع  $r$  و زمان  $t$  است و  $x$  هم مختصه طول در راستای شیپوره است. شعاع تابعی از  $x$  است:

$$r = r(x) \quad (2)$$

4. Mortel  
5. Ilinskii

1. Macrosonic  
2. Béquin  
3. Morfey

$p_0$  و  $\rho_0$  فشار و چگالی اتمسفر هستند و  $\gamma$  نسبت ظرفیت حرارتی ویژه است. معادله ۶ بر مبنای تابع پتانسیل سرعت  $\phi$  نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\xi + 4\eta/3)}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) \quad (13)$$

پس از جایگزینی  $p$  از معادله ۱۲ در معادله ۱۳ و انتگرال گیری نسبت به  $x$ ، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = -\frac{\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho_0} \rho^{(\gamma-1)} + \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \phi(t) \quad (14)$$

در اینجا  $\phi(t)$  یک تابع از زمان و  $\delta$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta = \frac{(\xi + 4\eta/3)}{\rho_0} \quad (15)$$

با جایگزینی  $\rho$  با  $\rho_0$  در جمله اتلاف در حقیقت شرایط غیرخطی در عبارت جذب در نظر گرفته نشده‌است. این فرض در صورتی که اتلاف انرژی اندک باشد درست می‌باشد. شایان ذکر است که سرعت انتشار  $c$  برابر است با

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho^{(\gamma-1)} \quad (16)$$

تابع  $\phi(t)$  در معادله ۱۴ به صورت زیر است:

$$\phi(t) = const \quad (17)$$

از آنجا که تابع پتانسیل  $\phi$  با دقتی دلخواه بر حسب توابع متناوب نوشته می‌شود، طرفین معادله را می‌توان به اندازه دلخواه به هم نزدیک کرد. تنها چیزی که از این طریق نمی‌توان جبران کرد، مولفه ثابت در تابع  $\phi$  است. به همین دلیل ثابت  $\phi$  در معادله ۱۷ بگونه‌ای انتخاب می‌شود که برابر بخش خطی معادله وقتی که  $\rho$  به  $\rho_0$  نزدیک می‌شود باشد:

$$const = \frac{c_0^2}{\gamma-1} \quad (18)$$

در اینجا  $c_0$  سرعت انتشار صوت در اتمسفر است. از معادله ۱۴ می‌رسیم به:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = -\frac{c^2 - c_0^2}{\gamma-1} + \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (19)$$

مشتق معادله ۱۴ نسب به  $t$  به صورت زیر می‌باشد:

جریانی اجباری از دهانه به داخل شیپوره هدایت می‌شود. در این حالت، جرم گاز در واحد طول و جریان آن از مقطعی با شعاع  $r$  برابر است با:

$$M = \rho \pi r^2 \quad (3)$$

$$F = \rho u \pi r^2 \quad (4)$$

در اینجا  $\rho$  چگالی و  $u$  سرعت ذره در جهت  $x$  است. بعد از قرار دادن معادله ۳ و ۴ در معادله ۱، معادله پایستگی جرم گاز در شیپوره به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} (r^2 \rho u) = 0 \quad (5)$$

معادله تکانه برای حرکت تک بعدی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\xi + 4\eta/3)}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} (r^2 u) \right) \quad (6)$$

در اینجا  $p$  فشار و  $\xi$  و  $\eta$  ضرایب ویسکوزیته هستند.

در مورد جمله اتلاف (آخرین جمله در سمت راست معادله ۶) باید توضیحاتی داده شود. بطور کلی جمله اتلاف در معادله برای مولفه  $i$  ام سرعت را می‌توان به صورت سه بعدی به صورت زیر نوشت [۴۲، ۴۳]:

$$\eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left( \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (7)$$

برای پتانسیل سرعت تابع  $\phi$  را معرفی می‌کنیم:

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (8)$$

در این صورت معادله ۷ به صورت زیر در می‌آید:

$$\eta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_k} + \left( \xi + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_k} = \left( \xi + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_k} \quad (9)$$

پس از انتگرال گرفتن از معادله ۹ نسبت به  $x_i$  و صفر کردن ثابت انتگرال، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\left( \xi + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_k} = \left( \xi + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \left( \xi + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla \cdot u \quad (10)$$

صورت تک بعدی نماد  $\nabla \cdot u$  به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \cdot u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} (r^2 u) \quad (11)$$

با ترکیب دو معادله ۱۰ و ۱۱، جمله اتلاف در معادله ۶ بدست می‌آید. معادله حالت برای یک گاز ایده آل به صورت زیر می‌باشد [۴۴]:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (12)$$

(علمی - پژوهشی)

اصغر نجفی

با استفاده از معادله ۱۶، معادله ۲۵ را به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \\ & = - \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ & + \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

سرعت انتشار  $C^2$  از معادله ۲۶ توسط معادله ۱۶ حذف می‌شود:

$$c^2 = c_0^2 - (\gamma - 1) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (27)$$

دوباره جمله اتلاف حذف می‌شود. بعد از جایگذاری معادله ۲۷ در معادله ۲۶ روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \frac{c_0^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ & + \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ & = +2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ & + \frac{\gamma - 1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 \\ & + \frac{\gamma - 1}{2r^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

معادله ۲۸ نحوه تشکیل امواج ایستاده و غیرخطی صوت

را در شیپورهایی بیان می‌کند که شکل آن‌ها با تابع  $r(x)=r$  مشخص می‌شود. تقریبهای استفاده شده در معادله با فرض میرایی کم صوت است. بر اساس این فرض است که جمله‌های غیر خطی میرایی حذف شده‌اند و ضرایب ویسکوزیته ثابت در نظر گرفته شده‌اند. جمله‌های میرایی برای اتلاف انرژی در حجم در نظر گرفته شده‌اند. گرچه اتلاف انرژی در لایه مرزی در اینجا مطرح نشده‌است، ولی می‌توان آن‌ها را در ضریب جذب معادل که مقدار آن بیشتر از اتلاف حجم است، در نظر گرفت. همان‌طور که در معادله ۲۸ مشاهده می‌شود معادلات دینامیکی برای گاز کامل به یک معادله بر حسب پتانسیل سرعت تبدیل می‌شود. معادله فقط شامل جملات غیرخطی درجه دو و سه است، با وجود اینکه یکی از معادلات اصلی، یعنی معادله ۱۲، دارای جمله غیرخطی به صورت  $\rho^\gamma$  است. برای یک گاز ایده آل بدون اتلاف،  $\delta = 0$ ، معادله ۲۸ تبدیل می‌شود به:

$$\begin{aligned} & \frac{c_0^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ & \frac{\gamma - 1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + \frac{\gamma - 1}{2r^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = - \frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{(\gamma-2)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \\ & \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

مشق  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  را می‌توان از معادله ۲۰ حذف کرد. با استفاده از معادله ۵ داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \\ & - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

با جایگذاری در معادله ۲۰ معادله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \\ & - \frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{(\gamma-2)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \right. \\ & \left. \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] + \\ & \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

مشق  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  از معادله ۲۲ با مشتق‌گیری از معادله ۱۴ نسبت به  $x$  حذف می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \\ & = - \frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{(\gamma-2)} \frac{\partial \rho}{\partial x} \end{aligned} \quad (23)$$

جمله اتلاف حذف شده‌است چون فقط در شرایط غیر خطی در معادله ۲۲ ظاهر می‌شود. با توجه به معادله ۲۳،  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial x} = - \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{(\gamma-2)} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1)$$

با جایگذاری معادله ۲۴ در معادله ۲۲ رابطه زیر را بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \\ & = - \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ & + \frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma r^2} \rho^{(\gamma-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\delta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

تشدید است. مقدار  $G_1$  که دارای معنای فیزیکی است برابر است با:

$$G_1 = \frac{\lambda}{L} \quad (۳۴)$$

$\lambda$  طول موج متناظر با فرکانس تشدید است و  $L$  طول میرایی است که برابر معکوس ضریب تضعیف  $\alpha$  برای همان فرکانس است.

$$L = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\delta \omega^2}{2c_0^3} \quad (۳۵)$$

### متغیرهای جدید

برای کاهش معادله ۳۳ به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل که شامل فقط اولین مشتق بر روی  $X$  است، متغیرهای جدید معرفی شده‌است.

$$V = R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (۳۶)$$

با ضرب تمام معادله ۳۳ در  $R^2$  و انجام برخی از تبدیلات، مجموعه‌ای از دو معادله را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial V}{\partial X} - \Omega^2 R^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} + \frac{8G\Omega}{\pi^3} \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial X} = \\ \frac{\Omega}{R^2} \frac{\partial V^2}{\partial T} + (\gamma - 1)\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial X} + \\ \frac{\gamma + 1}{2R^4} V^2 \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{2}{R^5} \frac{dR}{dX} V^3 \end{aligned} \quad (۳۷)$$

و

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{V}{R^2} \quad (۳۸)$$

تغییر متغیر زیر نیز باید به معادله بالا اعمال شود:

$$\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial T} \quad (۳۹)$$

معادلات ۳۹ و ۴۰ باید به حوزه فرکانس تبدیل شوند.

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial V}{\partial X} - \Omega^2 R^2 \frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{8G\Omega}{\pi^3} \frac{\partial^2 V}{\partial T \partial X} = \frac{\Omega}{R^2} \frac{\partial V^2}{\partial T} + \\ (\gamma - 1)\Omega \Psi \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\gamma + 1}{2R^4} V^2 \frac{\partial V}{\partial X} - \\ \frac{2}{R^5} \frac{dR}{dX} V^3 \end{aligned} \quad (۴۰)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial V}{\partial T} \quad (۴۱)$$

### معادلات حوزه فرکانس

فرض بر این است که شتاب تناوبی است و می‌تواند در فرم زیرارائه شود:

$$U = \sum_{k=-N}^N U_k e^{ikt} \quad (۴۲)$$

معادله ۲۹، معادله دقیقی برای شیپوره با تقارن محوری و شکل هندسی دلخواه است که از گاز کامل کم اتلاف پر شده‌است. برای شیپوره با شعاع ثابت، معادله ۲۹ به شکل زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\gamma - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (۳۰)$$

### آماده سازی برای محاسبات عددی

برای حل معادله ۲۸ ابتدا این معادله بی بعد می‌شود و سپس با تغییر متغیر مناسب مسئله از حوزه زمان به حوزه فرکانس منتقل می‌شود. در نتیجه، حل عددی آن در حوزه فرکانس ممکن می‌شود.

### بی بعدسازی

به دلایل محاسباتی بهتر است معادله ۲۸ بی بعد شود. متغیرهای بدون بعد زیر به این منظور تعریف می‌شوند.

$$X = \frac{x}{l}, \quad T = \omega t, \quad R = \frac{r}{l}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{l\omega_0^2} \quad (۲۹)$$

$l$  طول شیپوره است،  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای هوای ورودی به شیپوره است.  $\omega_0$  فرکانس پایه شیپور استوانه‌ای با طول  $l$  است. فرکانس  $\omega_0$  برابر است با:

$$\omega_0 = \frac{\pi c_0}{2l} \quad (۳۰)$$

در متغیرهای بدون بعد، معادله ۲۸ بصورت زیر شکل می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2 R^2} \frac{\partial}{\partial X} \left( R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) - \Omega^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} + \\ \frac{8G\Omega}{\pi^3 R^2} \frac{\partial^2}{\partial T \partial X} \left( R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) = \\ + 2\Omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial T} \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{(\gamma - 1)\Omega}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial T} \frac{\partial}{\partial X} \left( R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \\ + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)^3 + \frac{\gamma - 1}{2R^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial}{\partial X} \left( R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (۳۱)$$

در اینجا نمادهای جدید  $\Omega$  و  $G$  معرفی می‌شوند:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad G = \frac{\pi \delta \omega_0}{2c_0^2} \quad (۳۲)$$

در محاسبات عددی، ضریب میرایی بدون بعد  $G_1$  می‌شود:

$$G_1 = G\Omega_0 \quad (۳۳)$$

در اینجا  $\Omega$  یک فرکانس میانه در باند فرکانس باریکی است که ما با آن کار می‌کنیم. بعنوان یک قانون، برابر فرکانس

## (علمی - پژوهشی)

اصغر نجفی

$\delta_{kl}$  تابع دلتای کرونکر است و  $D'_m$  می‌شود:

$$D'_m = -(\gamma - 1)\Omega\Psi_m - \frac{\gamma + 1}{2R^4} [V^2]_m \quad (51)$$

$$D'_{-m} = (D'_m)^* , \quad F_{-k} = F_k^* \quad (52)$$

معادلات ۴۸ و ۵۰ بصورت عددی انتگرال گیری می‌شوند.

فشار و چگالی در شیپوره که با معادلات زیر محاسبه می‌شوند

$$\frac{P}{P_0} = \left[ 1 - (\gamma - 1) \frac{\pi^2}{4} (\Omega\Psi + \frac{1}{2R^4} V^2 - \frac{8G}{\pi^3 R^2} \frac{\partial V}{\partial X}) \right]^{\gamma/\gamma-1} \quad (53)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[ 1 - (\gamma - 1) \frac{\pi^2}{4} (\Omega\Psi + \frac{1}{2R^4} V^2 - \frac{8G}{\pi^3 R^2} \frac{\partial V}{\partial X}) \right]^{1/\gamma-1} \quad (54)$$

با تبدیل فوریه از تابع  $P(T, X)$  که توسط معادله ۵۵ داده شده‌است می‌توان مولفه‌های هارمونیک فشار را بدست آورد.

## الگوریتم برای محاسبه عددی

ابتدا مشتقات  $dV/dX$  از معادله ۵۰ به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$\frac{dV_l}{dX} = S_l (V_k \cdot \Psi_k \cdot X) \quad (55)$$

$S_l$  توابعی هستند که از حل معادله ۵۰ بدست می‌آیند. توابع  $S_l$  را می‌توان به راحتی از معادله خطی ۵۰ بدست آورد. اگر معادلات ۵۰ و ۴۸ در کنار هم قرار داده شوند، مجموعه‌ای از  $2N + 1$  معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه یک کوپل شده بر پایه متغیرهای حقیقی بدست می‌آید. این معادلات را می‌توان با روش رانگ کوتا حل کرد. شرایط مرزی در  $X=0$  و  $X=1$  داده شده‌است.  $2N + 1$  معادله برای شرایط مرزی وجود دارند که اینها هستند:

$$V_{-k} = U_{-k}, \text{ at } X=0 \quad (56)$$

در شیپوره‌های صوتی فرض می‌شود که انتهای شیپوره آزاد است. بنابراین فشار در انتهای شیپوره برابر است با فشار اتمسفر. بنابراین در  $X=1$ ،  $P=P_0$  با توجه به معادله ۵۶ می‌توان رابطه زیر را نتیجه گرفت:

$$\Omega\Psi_k + \frac{1}{2R^4} [V^2]_k - \frac{8G}{\pi^3 R^2} \frac{\partial V_k}{\partial X} = 0 \quad \text{at } X=1 \quad (57)$$

$U_k$  مجموعه دامنه نوسانی از اجزا هارمونیک حجم هوای ورودی است و  $U_{-k} = U_k^*$  که  $U_k$  مزدوج  $U_k$  می‌باشد. جواب‌های تناوبی معادله ۳۹ و ۴۰ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$V = \sum_{k=-N}^N V_k e^{ikt} \quad (43)$$

$$\Psi = \sum_{k=-N}^N \Psi_k e^{ikt} \quad (44)$$

$V_k$  مجموعه مولفه‌های هارمونیک از تابع تناوبی  $V$  است و  $V_{-k} = V_k^*$  که در آن مزدوج  $V_k$  است و  $V_0 = V_{dc}$  مولفه ثابت در تابع  $V$  است. تابع  $\Psi_k$  مولفه‌های هارمونیک مشتق زمانی تابع پتانسیل سرعت است. تابع  $\Psi_k^*$  مزدوج این تابع است و در نتیجه تابع  $\Psi_{-k}$  با  $\Psi_k^*$  برابر است. همینطور اینکه  $\Psi_0 = \Psi_0$ .  $N$  تعداد هارمونیک‌های است که در محاسبات نظر گرفته می‌شوند. همه مولفه‌های  $V_k$  و  $\Psi_k$  و همچنین تابع حقیقی  $V_{dc}$  به  $X$  وابسته هستند. بنابراین معادله ۴۲ و ۴۳ با معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب مجموعه مولفه‌های هارمونیک جایگزین می‌شوند. معادلات برای مولفه  $k$  به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi^2} \frac{dV_k}{dX} - ik\Omega^2 R^2 \Psi_k + \frac{i8kG\Omega}{\pi^3} \frac{dV_k}{dX} = \\ & \frac{ik\Omega}{R^2} [V^2]_k + \sum_{l=-N+k}^N \left\{ (\gamma - 1)\Omega\Psi_{k-l} \frac{dV_l}{dX} \right\} + \\ & \sum_{l=-N}^N \left\{ \frac{\gamma+1}{2R^4} [V^2]_{k-l} \frac{dV_l}{dX} - \frac{2}{R^5} \frac{dR}{dX} [V^2]_{k-l} V_l \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{d\Psi_k}{dX} = \frac{ikV_k}{R^2} \quad (46)$$

شاخص  $k$  از ۰ تا  $N$  متغیر است و  $[V^2]_k$  می‌شود

$$[V^2]_k = \sum_{l=-N+k}^N V_{k-l} V_l \quad (47)$$

که در آن  $k$  مقادیر ۰ تا  $2n$  را در بر می‌گیرد. معادله ۴۲ به شکل ماتریسی به صورت زیر است:

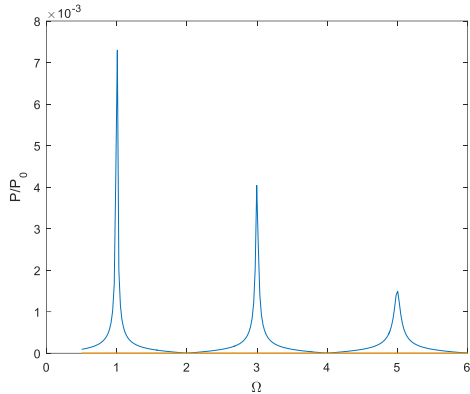
$$D_{kl} \frac{dV_l}{dX} = F_k \quad (48)$$

با توجه به معادله ۴۲، ماتریس  $D_{kl}$  و تابع  $F_k$  به صورت زیر بدست می‌آیند:

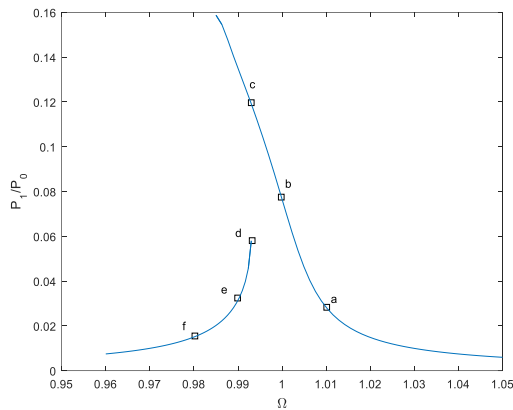
$$D_{kl} = \left( \frac{4}{\pi^2} + \frac{i8kG\Omega}{\pi^3} \right) \delta_{kl} + D'_{k-l} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} F_k &= ik\Omega^2 R^2 \Psi_k + \frac{ik\Omega}{R^2} [V^2]_k \\ &- \frac{2}{R^5} \frac{dR}{dX} \sum_{l=-N+k}^N \{ [V^2]_{k-l} V_l \} \end{aligned} \quad (50)$$

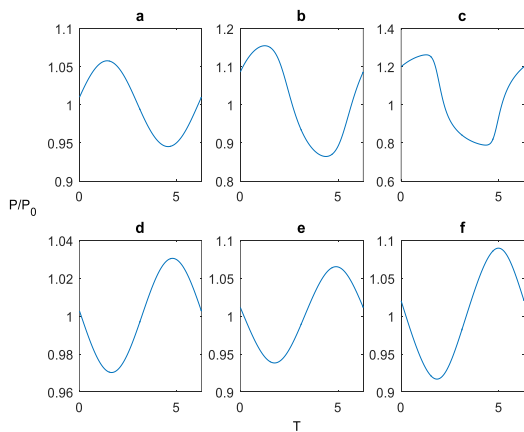
باشند بیشتر می‌شود. درست مانند حالتی که مجموعه‌ای از فنرها به صورت سری به هم متصل باشند و سختی تعدادی از آن‌ها افزایش پیدا کند. این موضوع باعث افزایش فرکانس طبیعی آن می‌شود. همچنین همانطور که در شکل ۷ نشان داده شده‌است همانند شیپوره استوانه‌ای شکل پاسخ فرکانسی حول فرکانس تشدید نرم شونده‌است.



شکل (۲): فشار بر حسب فرکانس تحریک در یک شیپور استوانه‌ای



شکل (۳): پاسخ فرکانسی مولفه پایه دامنه فشار برای یک رزوناتور استوانه‌ای



شکل (۴): فشار بر حسب زمان در ۶ نقطه مشخص شده در شکل ۳

برای حل از روش رانگ کوتای مرتبه پنجم با کنترل گام به گام تطبیقی با اعمال دو شرط مرزی یکی با  $(N+1)$  تابع معلوم در  $X=0$  و دیگری با  $N$  تابع در  $X=1$  استفاده می‌شود [۲۲].

وقتی توابع  $V_k$  و  $\Psi(k)$  بدست می‌آیند، تمام متغیرهای صوتی را می‌توان محاسبه کرد.

## نتایج و صحنه‌گذاری

### شیپوره استوانه‌ای

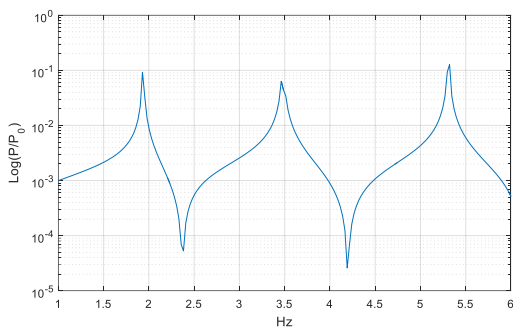
برای یک شیپوره استوانه‌ای پاسخ فرکانسی مولفه پایه به شکل ۲ در خواهد آمد. همانطور که دیده می‌شود هارمونیک‌ها در ضرایب فرد باعث ایجاد قله‌هایی در نمودار شده‌اند. این نتیجه با توجه به اینکه در استوانه یک سر باز هارمونیک‌ها در ضرایب فرد تکرار می‌شوند منطقی است. در شکل ۳ نتیجه جالبی بدست آمده‌است. در این شکل ماهیت پیک اول در محدوده کوچکتری از فرکانس تحریک نمایش داده شده‌است. در این شکل فرکانس از دو طرف به فرکانس تحریک ۱ نزدیک شده‌است. این نمودار به طور واضح ماهیت نرم شونده‌گی جملات غیرخطی را نشان می‌دهد. شش نقطه در این نمودار مشخص شده‌است و شکل ۴ نوسانات فشار کل بر حسب زمان را در این نقاط نشان می‌دهد. در نقاط  $b$  و  $c$  تمایز بیشتری با نمودار سیسنوسی شکل در سایر نقاط وجود دارد. دلیل این موضوع آنست که در این نقاط دامنه ارتعاشات از سایر نقاط بیشتر است و در نتیجه اثرات غیرخطی قابل توجه‌تر خواهد بود. بنابراین هارمونیک‌های بالاتر اثر بیشتری خواهند داشت. همچنین توجه شود در نقاط  $a$  و  $b$  و  $c$  قله‌ها و دره‌ها عکس نقاط  $d$  و  $e$  و  $f$  هستند. در شکل ۵ دامنه فشار در مولفه هارمونیک اول تا سوم در راستای لوله استوانه‌ای به سمت دهانه باز رسم شده‌است. این نمودارها در حقیقت شکل موده‌های غیرخطی مرتبط با هارمونیک‌های مختلف هستند. همانطور که دیده می‌شود تنها در هارمونیک سوم یک گره در میانه لوله به وجود می‌آید. در این نقطه دامنه فشار به صفر می‌رسد.

### شیپور مخروطی

برای یک شیپور مخروطی پاسخ فرکانسی در شکل ۶ نشان داده شده‌است. همانطور که دیده می‌شود پیک‌های فرکانسی در فرکانس‌های بالاتر از شیپوره صوتی استوانه‌ای اتفاق می‌افتند. یک شیپوره مخروطی را می‌توان به صورت تعدادی زیادی استوانه با قطرهای مختلف در نظر گرفت که به صورت سری با هم قرار گرفته‌اند. با افزایش قطر استوانه‌ها سختی آنها بیشتر می‌شود. در نتیجه با کنار هم قرار دادن این استوانه‌ها سختی معادل آن‌ها از حالتی که استوانه‌ها هم قطر

(علمی - پژوهشی)

اصغر نجفی



شکل (۸): پاسخ فرکانسی برای یک شیپوره نمایی ( $\beta = 2$ )

جدول (۱): مقایسه نتایج تحلیلی و عددی برای یک شیپوره نمایی

فرکانس رزونانس	تحلیلی	روش عددی فعلی	خطا
۱	۱/۹۳۱۵	۱/۹۳۵۰	٪۰/۰
۲	۳/۴۷۹۸	۳/۴۶۵۰	٪۰/۴۳
۳	۵/۳۰۹۱	۵/۳۱۵۰	٪۰/۱۱

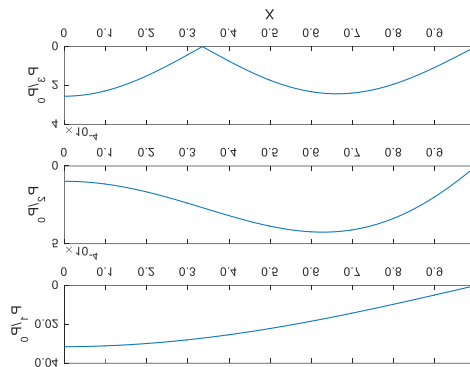
نتیجه گیری

معادلات غیرخطی بدست آمده در مقاله برای توجیه انتشار صوت در شیپوره‌های صوتی به صورت یک معادله با مشتقات جزئی از مرتبه سه هستند. در حالت یک بعدی این معادلات را می‌توان در حوزه فرکانس به صورت یک مسئله با شرایط مرزی درآورد. برای شیپوره‌هایی که دهانه آن‌ها به محیط بیرونی ختم می‌شود می‌توان در انتها شرط فشار ثابت را جایگزین کرد. با حل این معادلات به این شکل می‌توان روش‌های خطی تحلیلی پیشین را اعتباربخشی نمود.

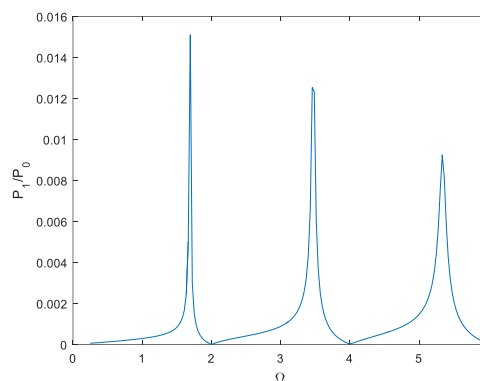
بر اساس تحلیل صورت گرفته بر روی شیپوره‌های استوانه‌ای و مخروطی مشخص گردید که نمودار دامنه بر حسب فرکانس به صورت نرم شونده است. این مطلب در مورد تمام هارمونیک‌های بدست آمده صادق است. همچنین با رسم شکل مودهای بدست آمده برای هارمونیک‌های مختلف مشخص شده‌است که در مودهای اول و دوم گره تشکیل نمی‌شود.

مراجع

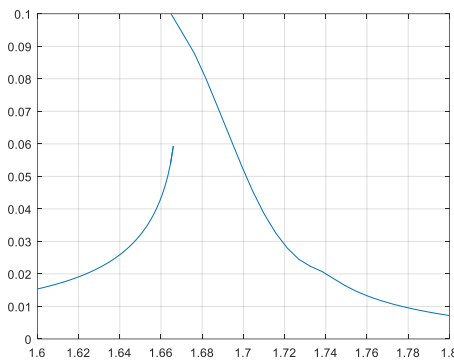
[1] H.-q. LIU, W.-q. ZHANG, Y. LU, and Z. GUO, "Working Principle and Application of Acoustic Soot Blower [J]," China Environmental Protection Industry, vol. 6, 2009.  
 [2] P. Mirek, "Field Testing of Acoustic Cleaning System Working in 670Mwth CFB Boiler," Chemical and Process Engineering, vol. 34, no. 2, pp. 283-291, 2013.



شکل (۵): اندازه مولفه‌های هارمونیک در راستای لوله استوانه‌ای



شکل (۶): پاسخ فرکانسی عنصر پایه دامنه فشار برای یک شیپوره مخروطی



شکل (۷): پاسخ فرکانسی مولفه پایه دامنه فشار برای یک شیپوره مخروطی

شیپوره نمایی

شکل هندسی یک شیپوره نمایی به صورت  $S = S_0 \exp(2\beta x)$  تعریف می‌شود. برای این شیپوره‌ها می‌توان رابطه تحلیلی برای پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی در حالت خطی معرفی کرد [24]. بر این اساس جدول ۱ فرکانس‌های تحلیلی بدست آمده را نشان می‌دهد. شکل ۸ نیز نتایج بدست آمده از تحلیل غیرخطی را نشان می‌دهد.

- [12] S. K. Thomas and T. M. Muruganandam, "A review of acoustic compressors and pumps from fluidics perspective," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 283, pp. 42-53, 2018.
- [13] D. T. Blackstock, "Fundamentals of physical acoustics," ed: Acoustical Society of America, 2001.
- [14] A. Webster, "A mechanically blown wind instrument," *Physics Review*, vol. 13, p. 164, 1919.
- [15] E. R. Geddes, "Acoustic waveguide theory," *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 37, no. 7/8, pp. 554-569, 1989.
- [16] P. Béquin and C. L. Morfey, "Weak nonlinear propagation of sound in a finite exponential horn," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, no. 6, pp. 2649-2659, 2001.
- [17] M. P. Mortell, K. F. Mulchrone, and B. R. Seymour, "The evolution of macrosonic standing waves in a resonator," *International Journal of Engineering Science*, vol. 47, no. 11-12, pp. 1305-1314, 2009.
- [18] T. S. Lucas and T. W. Van Doren, "Resonant macrosonic synthesis," ed: Google Patents, 1996.
- [19] Y. A. Ilinskii, B. Lipkens, T. S. Lucas, T. W. Van Doren, and E. A. Zabolotskaya, "Nonlinear standing waves in an acoustical resonator," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, no. 5, pp. 2664-2674, 1998.
- [20] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, Volume 6*. Elsevier, 2013.
- [21] G. J. Van Wylen and R. E. Sonntag, *Fundamentals of classical thermodynamics* (no. 536 VAN). Wiley New York, 1985.
- [22] L. F. Shampine, J. Kierzenka, and M. W. J. T. n. Reichelt, "Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c," vol. 2000, pp. 1-27, 2000.
- [3] D. N. Nilaj and A. Vishwanath, "Experimental and Simulation Study of Modified Acoustic Horn Design for Sonic Soot Cleaning," in *Innovative Design and Development Practices in Aerospace and Automotive Engineering*: Springer, 2017, pp. 117-134.
- [4] A. Shaikh and N. Deshmukh, "Simulation and Experimental Study of Acoustic Waves for Cleaning of Soot in Process Equipments," in *International Conference on Communication and Signal Processing 2016 (ICCASP 2016)*, 2016: Atlantis Press.
- [5] L. Y. H. Q. C. Lihong and G. Fangzhong, "Influence of the shapes of resonance tubes on the fundamental frequency energy of thermoacoustic acoustic field [J]," *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition)*, vol. 4, 2007.
- [6] G. W. Swift, "Thermoacoustic engines," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 84, no. 4, pp. 1145-1180, 1988.
- [7] G. W. Swift, "Thermoacoustic engines and refrigerators," *Physics today*, vol. 48, no. 7, 1995.
- [8] G. W. Swift, "Thermoacoustics: A unifying perspective for some engines and refrigerators," ed: Acoustical society of America, 2003.
- [9] D. Mackenzie, "Cool Sounds at 200 Decibels," *Science*, vol. 278, no. 5346, pp. 2060-2060, 1997.
- [10] S. Ashley, "Sound waves at work," *Mechanical engineering*, vol. 120, no. 03, pp. 80-84, 1998.
- [11] F. Lalande and D. Perkins, "INTRODUCTION TO ACOUSTIC COMPRESSORS," in *Proceedings of the ASME Noise Control and Acoustics Division: Presented at the... ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2000*, p. 125: American Society of Mechanical Engineers.