



# بررسی تأثیر پارامترهای یک جاذب دینامیکی غیر خطی در کاهش دامنه ارتعاش یک سیستم غیر خطی

محمد مهدی نظری<sup>۱</sup>، عباس رهی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

\* نویسنده مخاطب: a\_rahi@sbu.ac.ir

هدف این مقاله، استفاده از جاذب دینامیکی غیرخطی به صورت تیر یک سرگیردار با یک جرم متمرکز در انتهای آن به منظور کاهش دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی تشدید شده می‌باشد. سیستم ارتعاشی اولیه شامل جرم، فنر غیرخطی و میرایی ویسکوز می‌باشد و نیروی هارمونیک به آن اعمال شده و باعث تشدید سیستم می‌شود. در این حالت برای کاهش دامنه ارتعاش، از یک جاذب دینامیکی غیرخطی استفاده شده است. به این منظور ابتدا، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم ارتعاشی محاسبه شده و سپس با استفاده از معادلات لاگرانژ، معادلات حاکم بر سیستم استخراج می‌شود. برای حل معادلات حاکم، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود. با کدنویسی در متلب و حل عددی، در حالت ناچیز در نظر گرفتن جرم جاذب و سفتی فنر غیرخطی دافینگ، صحت‌گذاری نتایج انجام می‌شود. تأثیر جاذب دینامیکی ارتعاش غیرخطی بر کاهش دامنه ارتعاشات نوسانگر تشدید شده، به خوبی قابل مشاهده است. همچنین تأثیر پارامترهای اصلی جاذب دینامیکی غیرخطی بر روی دامنه ارتعاشات سیستم اولیه بررسی می‌شود. واژه‌های کلیدی: جاذب دینامیکی غیرخطی، ارتعاشات غیرخطی، معادلات لاگرانژ، روش مقیاس‌های چندگانه

## Investigating the Influence of the Parameters of a Nonlinear Dynamic Absorber in Reducing the Vibration Amplitude of a Nonlinear System

M. M. Nazari<sup>1</sup>, A. Rahi<sup>2\*</sup>

1 PhD. Student, Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

2\*Assistant Professor, Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

\*Corresponding Author: a\_rahi@sbu.ac.ir

*The purpose of this paper is to use a nonlinear dynamic absorber in the form of a beam with concentrated mass at its end to reduce the amplitude of the resonant nonlinear oscillator vibration. The primary vibration system consists of mass, nonlinear spring, and viscous damping, and the harmonic force is applied to it and causes the system to intensify. In this case, a nonlinear dynamic absorber has been used to reduce the vibration amplitude. For this purpose, first, the kinetic energy and potential energy of the vibrating system are calculated, and then the governing equations of the system are extracted using Lagrange's equations. To solve the governing equations, the method of multiple scales is used. By coding in MATLAB and numerical solution, in the negligible case of considering the mass of the absorber and the stiffness of the non-linear Duffing spring, the validation of the results is done. The effect of the nonlinear dynamic vibration absorber on reducing the amplitude of the resonant oscillator vibration can be seen well. Also, the influence of the main parameters of the nonlinear dynamic absorber on the vibration amplitude of the primary system is investigated.*

**Keywords:** nonlinear dynamic absorber; nonlinear vibration; Lagrange's equations; multiple scales method.

## ۱ مقدمه

استفاده از جاذب دینامیکی ارتعاش در سیستم‌هایی که فرکانس تحریک خارجی و فرکانس طبیعی سیستم هیچکدام قابل تغییر نیستند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از بهترین راهکارها برای کنترل ارتعاشات در صنایع گوناگون که نقش مهمی در کنترل تشدید و خستگی سازه‌ها دارد، استفاده از جاذب دینامیکی ارتعاش است. با به کار بردن جاذب دینامیکی ارتعاش، دامنه ارتعاش سیستم اصلی کاهش می‌یابد.

تاکنون پژوهش‌های متعددی در زمینه جاذب‌های دینامیکی ارتعاش سیستم‌ها انجام شده است. ابوندیس-فونگ و همکاران [۱] طراحی بهینه یک جاذب ارتعاشی غیرخطی متصل به نوسانگر تشدید شده را بررسی کردند. آنها در پژوهش خود، جاذب دینامیکی ارتعاش را به صورت یک تیر یک سرگیردار بدون جرم دارای یک جرم متمرکز در انتهای آن در نظر گرفتند و سیستم ارتعاشی اصلی نیز شامل جرم، فنر خطی و دمپر خطی به صورت میرایی ویسکوز بود که تحت اثر نیروی هارمونیک قرار داشت. تابع هدف آنها دامنه ارتعاشات نوسانگر تشدید شده و پارامترهای بهینه‌سازی نیز جرم متمرکز و طول تیر بود. بعد از تعیین مقادیر بهینه به روش ضرایب ضرایب لاگرانژ و شرایط کیروش‌کان- تاکر، تأثیر آنها را بر کاهش دامنه ارتعاشات به صورت عددی و تجربی مورد بررسی قرار دادند. هریس و همکاران [۲] یک جاذب ارتعاش غیرخطی به صورت چاه انرژی غیرخطی به منظور کاهش ارتعاشات پیچشی سیستم‌های پیشران طراحی کردند و با آزمون تجربی تأثیر سفتی و اینرسی چاه انرژی غیرخطی را بر کاهش دامنه ارتعاشات پیچشی موتور الکتریکی بررسی کردند. واز کوئر- گونزالز و سیلوا- ناوارو [۳] یک جاذب ارتعاشی به شکل پاندولی را برای یک سیستم دافینگ تحت تحریک خارجی مورد ارزیابی قرار دادند و فرکانس و پاسخ دینامیکی را با روش مقیاس‌های چندگانه بدست آوردند و نتایج را با یک جاذب ارتعاشی پاندولی با کاربرد مشابه برای یک سیستم ارتعاشی اولیه خطی مقایسه کردند. با استفاده از شبیه‌سازی عددی، پاسخ‌های فرکانسی تقریبی و رفتار دینامیکی را برای حالت پایا و پاسخ‌های گذرا مورد بررسی قرار دادند و تأثیر استفاده از جاذب ارتعاشی در کاهش دامنه ارتعاشات سیستم اصلی را ارائه نمودند. سیلوا-ناوارو و ابوندیس- فونگ [۴] یک جاذب ارتعاشی غیرخطی متصل به یک ساختمان دو طبقه را بر روی جرم دینامیکی ارتعاش را به صورت یک تیر یک سرگیردار بدون جرم دارای یک جرم متمرکز در انتهای آن در نظر گرفتند و سیستم ارتعاشی اصلی شامل دو طبقه صلب با ستون‌های انعطاف‌پذیر بود که تحت تحریک پایه به صورت هارمونیک قرار داشت. آنها دامنه‌های ارتعاشی را با روش مقیاس‌های چندگانه بدست آوردند و نتایج کاهش دامنه ارتعاشات دو طبقه را به صورت تجربی و حل عددی مورد ارزیابی قرار دادند.

چانگ و همکاران [۵] یک جاذب دینامیکی ارتعاش با سفتی نزدیک به صفر برای جذب ارتعاش فرکانس‌های بسیار پایین مورد مطالعه قرار دادند. آنها با در نظر گرفتن یک مدل ساده فنر مورب، طراحی مفهومی یک جاذب دینامیکی ارتعاش با سفتی نزدیک به صفر را انجام دادند. همچنین رفتار دینامیکی سیستم ارتعاشی اولیه را با استفاده از جاذب دینامیکی ارتعاش تحت تحریک هارمونیک، با روش بالانس هارمونیک و حل عددی تحلیل کردند. لیو و همکاران [۶] ویژگی‌های دینامیکی یک سیستم جداسازی ارتعاش با سفتی نزدیک به صفر را برای جاذب‌های دینامیکی ارتعاش کوپل در نظر گرفتند. آنها تأثیر جرم، سفتی و میرایی جاذب دینامیکی ارتعاش را بر روی ویژگی‌های پاسخ دینامیکی و قابلیت انتقال نیروی سیستم کوپل به صورت عددی بررسی کردند و آن را با یک سیستم جداسازی ارتعاش با سفتی نزدیک به صفر مقایسه کردند. چانگ و همکاران [۷] جاذب دینامیکی ارتعاش با سفتی نزدیک به صفر نیمه فعال را به صورت تئوری و تجربی مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان داد که جاذب مورد بررسی، جذب ارتعاش را در یک فرکانس بسیار پایین فعال می‌کند و فرکانس ضد تشدید برای جذب ارتعاش را می‌توان به طور مؤثر تنظیم نمود.

اسامی [۸] طراحی بهینه جاذب‌های ارتعاشی دو جرمی با آرایش‌های مختلف سری و موازی متصل شده به سیستم یک درجه آزادی غیر میرا تحت تحریک هارمونیک را با استفاده از دو معیار بهینه‌سازی و یک معیار ماکزیمم پایداری مورد بررسی قرار داد. آنه و نگویان [۹] جاذب دینامیکی غیرمعمول را به روش تحلیلی، بهینه‌سازی کردند. یانگ و همکاران [۱۰] از جاذب‌های دینامیکی ارتعاش برای کنترل ارتعاش یک صفحه در دو محدوده فرکانسی کم و زیاد استفاده کردند و مدل خود را به صورت تحلیلی حل نموده و پس از استخراج معادلات دینامیکی حرکت، به دو روش حل عددی و آزمون تجربی، پاسخ ارتعاشی سیستم را محاسبه کردند و مکان بهینه جاذب‌های ارتعاشی را تعیین نمودند.

وانگ و کو [۱۱] تأثیر جاذب دینامیکی ارتعاش را در ارتعاش غیرخطی یک تیر لولا شده بررسی کردند و پاسخ‌های سیستم را به دو صورت حل تحلیلی و نتایج آزمون تجربی واقعی مقایسه نمودند. علی و ادھیکاری [۱۲] مدل جاذب دینامیکی ارتعاش را به شکل بازتاب انرژی پیزوالکتریک برای ذخیره انرژی ارتعاشی سیستم ارائه کردند و پاسخ‌های سیستم را به ازای تغییرات پارامترهای مختلف طراحی، بررسی نمودند. حبیب و همکاران [۱۳] روش دن هارتوگ را برای جاذب‌های ارتعاشات غیرخطی با عنوان چاه‌های غیرخطی انرژی تعمیم دادند و پاسخ‌های سیستم را برای دو حالت خطی و غیرخطی، بررسی و مقایسه کردند. وانگ [۱۴] با حل تحلیلی اثبات کرد که می‌توان از ستون آویزان به عنوان یک جاذب دینامیکی ارتعاش برای سیستم جرم و فنر استفاده نمود.

ارتعاشات و جلوگیری از تشدید سیستم ارتعاشی اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پژوهش یک جاذب دینامیکی غیرخطی شامل تیر یک سرگیردار با جرم متمرکز در انتها به منظور کاهش دامنه ارتعاشات یک سیستم غیرخطی مدل‌سازی می‌شود. پس از استخراج معادلات حرکت به روش لاگرانژ، با روش مقیاس‌های چندگانه، معادلات غیرخطی حل می‌شوند. سپس تأثیر پارامترهای اصلی جاذب دینامیکی غیرخطی مانند جرم متمرکز انتهای تیر، طول و جرم تیر یک سرگیردار بر کاهش دامنه ارتعاش سیستم اولیه مورد بررسی قرار می‌گیرد. از نوآوری‌های این پژوهش می‌توان به در نظر گرفتن جرم تیر جاذب دینامیکی غیرخطی و همچنین سیستم اولیه غیرخطی (فنر غیرخطی دافینگ) اشاره نمود. نتایج حاصل از این تحقیق می‌تواند مهندسان طراح را در کاهش دامنه ارتعاشات سازه‌ها ناشی از زلزله با استفاده از جاذب‌های دینامیکی ارتعاش باری کند.

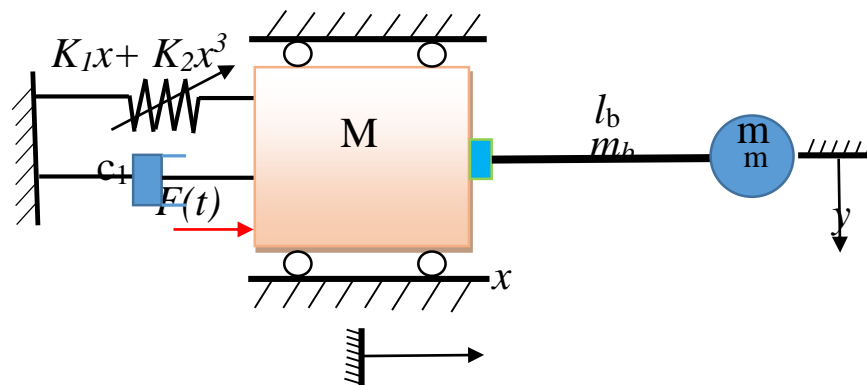
## ۲ مدل‌سازی و استخراج معادلات حاکم بر سیستم نوسانگر و جاذب دینامیکی غیرخطی

سیستم ارتعاشی غیرخطی اولیه شامل جرم  $M$ ، فنر غیرخطی دافینگ به سفتی  $k_1x + k_2x^3$  و میرایی ویسکوز با ضریب میرایی  $c_1$  در جهت  $x$  که تحت اثر نیروی هارمونیک خارجی  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$  قرار دارد که  $F_0$  دامنه نیروی تحریک و  $\Omega$  فرکانس تحریک می‌باشد. به منظور کاهش دامنه ارتعاشات سیستم اصلی از جاذب دینامیکی ارتعاش غیرخطی شامل یک تیر نازک با جرم  $m_b$  و به طول  $l_b$  که به سیستم اولیه متصل شده است و یک جرم متمرکز  $m$  در انتهای آن و میرایی تیر به صورت ویسکوز با ضریب میرایی  $c_2$  می‌باشد. مدل نوسانگر به همراه جاذب دینامیکی ارتعاش در شکل ۱ نمایش داده شده است.  $x$  و  $y$  به عنوان درجات آزادی سیستم به ترتیب جابجایی طولی سیستم ارتعاشی غیرخطی اولیه و جابجایی عرضی تیر یک سرگیردار می‌باشند.

فوسدیک و یتما [۱۵] یک جاذب دینامیکی ویسکوالاستیک را برای یک سیستم ارتعاشی مورد بررسی قرار دادند که در آن عملکرد جاذب دینامیکی نسبت به زمان نیز تغییر می‌کند که اصطلاحاً به آن جاذب ترموویسکوالاستیک گفته می‌شود. در مدل‌سازی این جاذب ارتعاشی، رفتار ویسکوالاستیک با دو پارامتر مدول ملایم‌سازی و زمان ملایم‌سازی کنترل می‌شود. بونسل و همکاران [۱۶] کاربرد جاذب دینامیکی ارتعاش را در یک سیستم تیر تکه‌ای-خطی در دو حالت وجود و عدم وجود میرایی بررسی نمودند و پس از مدل‌سازی سیستم به صورت جرم، فنر و دمپر معادل، حل خود را به صورت عددی ارائه نمودند و در پایان با انجام تست تجربی، صحت‌گذاری نتایج را انجام دادند. چونگ و ونگ [۱۷] یک جاذب دینامیکی جدید تحت عنوان جاذب غیرمعمول را طراحی و مدل‌سازی نمودند. منظور از غیرمعمول بودن جاذب مدل آنها، این است که به جای آن که دمپر به جرم اصلی سیستم متصل باشد، مستقیماً به زمین وصل می‌شود و این کار، در به حداقل رساندن ارتعاشات یا پاسخ سیستم نقش بسزایی را نسبت به روش معمول ایجاد می‌کند.

کامران و همکاران [۱۸] با مدل‌سازی یک دستگاه ماشین‌کاری به یک سیستم گسسته پنج درجه آزادی با جرم، فنر و دمپر، اقدام به طراحی جاذب دینامیکی ارتعاش بهینه دستگاه ماشین‌کاری به کمک الگوریتم ژنتیک نمودند. فبو و ماچادو [۱۹] یک جاذب دینامیکی غیرخطی متصل به یک سیستم ارتعاشی یک درجه آزادی خطی تحت تحریک خارجی پرپودیک را مطالعه نمودند. با استفاده از روش میانگین‌گیری، معادلات حرکت حاکم بر سیستم را حل کردند و منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم را استخراج نمودند. وگنر و هلفریچ [۲۰] کاربرد جاذب دینامیکی ارتعاش را در یک تیر یک سرگیردار و صفحه با وجود یک نیروی خارجی سینوسی با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند.

یکی از روش‌های مهم جلوگیری از تشدید در سیستم ارتعاشی اصلی، استفاده از جاذب دینامیکی ارتعاش می‌باشد. جاذب دینامیکی ارتعاش، یک سیستم فرعی مکانیکی است که برای کاهش دامنه



شکل ۱- سیستم ارتعاشی اولیه دارای فنر غیرخطی دافینگ با ارتعاشات اجباری و میرا به همراه جاذب دینامیکی ارتعاش

معادله‌ی لاگرانژ عبارت است از:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2) \quad \begin{cases} q_1=x \\ q_2=y \end{cases} \quad (9)$$

نیروهای غیرپایستار  $Q_1$  و  $Q_2$  برابر هستند با:

$$Q_1 = F_0 \cos \Omega t - c_1 \dot{x}, \quad Q_2 = -c_2 \dot{y} \quad (10)$$

با جایگذاری انرژی جنبشی و پتانسیل و نیروهای غیرپایستار در معادله لاگرانژ، معادلات حاکم بر سیستم ارتعاشی عبارت است از:

$$(M + m + m_b) \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x + k_2 x^3 - \left( \frac{6m}{5l_b} + \frac{3m_b}{8l_b} \right) (y\ddot{y} + \dot{y}^2) = F_0 \cos \Omega t$$

$$m\ddot{y} + c_2 \dot{y} + \left( \frac{3EI}{l_b^3} - \left( \frac{6m}{5l_b} + \frac{3m_b}{8l_b} \right) \ddot{x} \right) y \quad (11)$$

$$+ \left( \frac{36m}{25l_b^2} + \frac{213m_b}{770l_b^2} \right) y (y\ddot{y} + \dot{y}^2) = 0$$

### ۳ حل معادلات غیرخطی حاکم با استفاده از

#### تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه

یکی از روش‌های متداول حل معادلات غیرخطی، استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه است. در این روش از مقیاس‌های تند و کند زمانی برای متغیرهای مستقل استفاده می‌شود. سپس با صفر قرار دادن عبارت سکولار، دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی و دامنه ارتعاشات جاذب دینامیکی غیرخطی بدست می‌آیند. معادلات حرکت غیرخطی سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\zeta_1\omega_1\dot{x} + \omega_1^2 x + \varepsilon\alpha x^3 - (\varepsilon h + \varepsilon p)(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = \varepsilon f \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\zeta_2\omega_2\dot{y} + (\omega_2^2 - (\varepsilon g + \varepsilon q)\ddot{x}) y + (\varepsilon^2\beta + \varepsilon^2\lambda)(y\ddot{y} + \dot{y}^2) y = 0 \quad (12)$$

با توجه به غیرخطی بودن معادلات حاکم، پارامترهای نرمالیزه سیستم عبارت است از:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{M + m + m_b}, \quad 2\varepsilon\zeta_1\omega_1 = \frac{c_1}{M + m + m_b}, \quad \varepsilon\alpha = \frac{k_2}{M + m + m_b}$$

$$\varepsilon h = \frac{6}{5l_b} \left( \frac{m}{M + m + m_b} \right), \quad \varepsilon p = \frac{3}{8l_b} \left( \frac{m_b}{M + m + m_b} \right), \quad \varepsilon f = \frac{F_0}{M + m + m_b} \quad (13)$$

$$\omega_2^2 = \frac{3EI}{ml_b^3}, \quad 2\varepsilon\zeta_2\omega_2 = \frac{c_2}{m}, \quad \varepsilon g = \frac{6}{5l_b}, \quad \varepsilon q = \frac{3}{8l_b} \left( \frac{m_b}{m} \right)$$

$$\varepsilon^2\beta = \frac{36}{25l_b^2}, \quad \varepsilon^2\lambda = \frac{213}{770l_b^2} \left( \frac{m_b}{m} \right), \quad \varepsilon = \frac{6\delta_0}{5l_b}, \quad \delta_0 = \frac{F_0}{k_1}$$

با در نظر گرفتن المانی به طول  $d\eta$  که به فاصله  $\eta$  از جرم  $M$  (انتهای چپ تیر) قرار دارد، تغییر شکل قائم یا خیز تیر به صورت تابعی از فاصله‌ی  $\eta$  ( $0 \leq \eta \leq l_b$ ) و جابجایی انتهایی تیر  $y$  به صورت رابطه (۱) می‌باشد:

$$z(\eta) = \frac{y}{2l_b^3} (3l_b\eta^2 - \eta^3) \quad (1)$$

جابجایی محوری جرم جاذب عبارت است از:

$$w = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \left( \frac{dz}{d\eta} \right)^2 d\eta \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۲) و مشتق‌گیری نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$w = \frac{y^2}{4l_b^6} \int_0^{l_b} (6l_b\eta - 3\eta^2)^2 d\eta = \frac{3y^2}{5l_b} \Rightarrow \dot{w} = \frac{6y\dot{y}}{5l_b} \quad (3)$$

با صرف‌نظر از انرژی جنبشی ناشی از ارتعاش عرضی تیر یک سرگیردار، انرژی جنبشی سیستم ارتعاشی عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{v}^2 + T_b \quad (4)$$

در رابطه بالا  $v$  سرعت مطلق جرم متمرکز برابر است با:

$$v = \sqrt{\dot{y}^2 + (\dot{x} - \dot{w})^2} \quad (5)$$

انرژی جنبشی تیر به عنوان جاذب دینامیکی ارتعاش برابر است با:

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \left( \frac{m_b}{l_b} \right) \left[ \dot{x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_0^{\eta} \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right) \right]^2 d\eta \quad (6)$$

$$d\eta = \frac{1}{2} m_b \left[ \dot{x}^2 - \frac{213y^2\dot{y}^2}{770l_b^2} - \frac{3}{4} \frac{\dot{x}y\dot{y}}{l_b} \right]$$

با فرض ناچیز بودن انرژی پتانسیل کرنشی محوری تیر یک سرگیردار به عنوان جاذب دینامیکی و صرف‌نظر از آن، انرژی پتانسیل سیستم ارتعاشی عبارت است از:

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{4} k_2 x^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{3EI}{l_b^3} \right) y^2 \quad (7)$$

لاگرانژین سیستم ارتعاشی به صورت رابطه (۸) بدست می‌آید:

$$L = T - V = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left( \dot{y}^2 + \frac{36y^2\dot{y}^2}{25l_b^2} + \dot{x}^2 - \frac{12\dot{x}y\dot{y}}{5l_b} \right) + \frac{1}{2} m_b \left( \dot{x}^2 - \frac{213y^2\dot{y}^2}{770l_b^2} - \frac{3}{4} \frac{\dot{x}y\dot{y}}{l_b} \right) - \frac{1}{2} k_1 x^2 - \frac{1}{4} k_2 x^4 - \frac{3EI}{2l_b^3} y^2 \quad (8)$$

مقیاس کند زمانی  $T_1$  می‌باشند. با جایگذاری پاسخ قطبی  $x_0$  و  $y_0$  در معادله (۱۷) و (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 &= -2i\zeta_1 \omega_1^2 A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} \\ &\quad - 2i\omega_1 A'(T_1) e^{i\omega_1 T_0} \\ &\quad - \alpha A^3(T_1) e^{3i\omega_1 T_0} \\ &\quad - 3\alpha A^2(T_1) \bar{A}(T_1) e^{i\omega_1 T_0} \\ &\quad - 2(h+p)\omega_2^2 B^2(T_1) e^{2i\omega_2 T_0} \\ &\quad + \frac{1}{2} f e^{i\Omega T_0} + CC \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 y_1 + \omega_2^2 y_1 &= -(g+q)\omega_1^2 A(T_1) B(T_1) e^{i(\omega_1+\omega_2)T_0} \\ &\quad - (g+q)\omega_1^2 A(T_1) \bar{B}(T_1) e^{i(\omega_1-\omega_2)T_0} \\ &\quad - 2i\omega_2 B'(T_1) e^{i\omega_2 T_0} \\ &\quad - 2i\zeta_2 \omega_2^2 B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + CC \end{aligned} \quad (22)$$

در معادلات بالا،  $CC$  عبارتهای مزدوج مختلط می‌باشند. دامنه‌های  $A(T_1)$  و  $B(T_1)$  را به شکل قطبی زیر تعریف می‌کنیم:

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\delta(T_1)}, \quad B(T_1) = \frac{1}{2} b(T_1) e^{i\gamma(T_1)} \quad (23)$$

با جایگذاری رابطه (۲۳) در معادلات (۲۱) و (۲۲) و با مساوی صفر قرار دادن عبارت سکولار معادلات (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$-i\zeta_1 \omega_1^2 a - i\omega_1 a' + \omega_1 a \delta' - \frac{3}{8} \alpha a^3 \quad (24)$$

$$-\frac{1}{2}(h+p)\omega_2^2 b^2 e^{i\phi_2} + \frac{1}{2} f e^{i\phi_2} = 0$$

$$-\frac{1}{4}(g+q)\omega_1^2 a b e^{-i\phi_2} - i\omega_2 b' + \omega_2 b \gamma' \quad (25)$$

$$-i\zeta_2 \omega_2^2 b = 0$$

در رابطه (۲۴) و (۲۵)،  $\phi_1 = \rho_1 T_1 - \delta$  و  $\phi_2 = 2\gamma - \delta - 2\rho_2 T_1$  می‌باشد و  $a'$ ،  $b'$ ،  $\delta'$  و  $\gamma'$  همگی مشتق نسبت به مقیاس کند زمانی  $T_1$  هستند. پاسخ حالت پایای سیستم با جایگذاری  $a' = 0$ ،  $b' = 0$ ،  $\delta' = \rho_1$  و  $\gamma' = \frac{\rho_1}{2} + \rho_2$  در معادلات (۲۴) و (۲۵) حاصل می‌شود. با مساوی صفر قرار دادن قسمت حقیقی و موهومی معادلات در حالت پاسخ پایا خواهیم داشت:

$$\omega_1 a \rho_1 - \frac{3}{8} \alpha a^3 - \frac{1}{2}(h+p)\omega_2^2 b^2 \cos \phi_2 + \frac{1}{2} f \cos \phi_1 = 0 \quad (26)$$

در رابطه (۱۳)،  $\varepsilon$  پارامتر کوچک اغتشاشات است و بیانگر این است که دامنه ارتعاشات اندک است. با تعریف  $T_n = \varepsilon^n t$ ،  $T_0 = t$  و  $T_1 = \varepsilon t$  به ترتیب نشان دهنده مقیاس‌های تند و کند زمانی و همچنین  $x_0$  و  $y_0$  توابع جابجایی در مرتبه  $\varepsilon^0$  و  $x_1$  و  $y_1$  توابع جابجایی در مرتبه  $\varepsilon^1$  هستند.

$$\begin{aligned} x &= x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \\ y &= y_0(T_0, T_1) + \varepsilon y_1(T_0, T_1) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

با تعریف اپراتور  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ ، مشتق نسبت به مقیاس‌های جدید زمانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 \quad (15)$$

رابطه فرکانس تحریک و فرکانس‌های طبیعی سیستم اولیه و جاذب دینامیکی غیرخطی به صورت  $\Omega = \omega_1 + \varepsilon \rho_1$  و  $\omega_1 = 2\omega_2 + 2\varepsilon \rho_2$  تعریف می‌شود که  $\varepsilon \rho_1$  و  $\varepsilon \rho_2$  به ترتیب پارامترهای ویژه داخلی و خارجی در روش اغتشاشات می‌باشد.

با جایگذاری  $x(T_0, T_1)$  و  $y(T_0, T_1)$  در معادلات حرکت غیرخطی سیستم (رابطه (۱۲)) و با جداسازی دستگاه معادلات بر اساس توان‌های صفر و یک  $\varepsilon$ ، دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon^0: D_0^2 x_0 + \omega_1^2 x_0 = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 &= -2\zeta_1 \omega_1 D_0 x_0 - 2D_0 D_1 x_0 - \alpha x_0^3 \\ &\quad + (h+p)y_0(D_0^2 y_0) + (h+p)(D_0 y_0)^2 + f \cos(\Omega T_0) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\varepsilon^0: D_0^2 y_0 + \omega_2^2 y_0 = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: D_0^2 y_1 + \omega_2^2 y_1 &= (g+q)(D_0^2 x_0)y_0 \\ &\quad - 2D_0 D_1 y_0 - 2\zeta_2 \omega_2 D_0 y_0 \end{aligned} \quad (19)$$

پاسخ هارمونیک معادله (۱۶) و (۱۸) به شکل قطبی عبارت است از:

$$x_0 = A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_1 T_0} + \dots \quad (20)$$

$$y_0 = B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-i\omega_2 T_0} + \dots$$

در رابطه بالا  $\bar{A}(T_1)$  و  $\bar{B}(T_1)$  به ترتیب مزدوج مختلط دامنه  $A(T_1)$  و  $B(T_1)$  می‌باشد که همگی تابعی از

$$R = \frac{2304\omega_2^8(\varepsilon\alpha)^2}{(\varepsilon h + \varepsilon p)^2(\varepsilon g + \varepsilon q)^6\omega_1^{12}} \left[ \left( \frac{\Omega}{2\omega_2} - 1 \right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2 \right]^3 - \frac{768\omega_2^4(\varepsilon\alpha)(\Omega - \omega_1)}{(\varepsilon h + \varepsilon p)^2(\varepsilon g + \varepsilon q)^4\omega_1^7} \left[ \left( \frac{\Omega}{2\omega_2} - 1 \right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2 \right]^2 + \frac{64 \left[ (\Omega - \omega_1)^2 + \omega_1^2(\varepsilon\zeta_1)^2 \right]}{(\varepsilon h + \varepsilon p)^2(\varepsilon g + \varepsilon q)^2\omega_1^2} \left[ \left( \frac{\Omega}{2\omega_2} - 1 \right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2 \right] - \frac{(\varepsilon f)^2}{(\varepsilon h + \varepsilon p)^2\omega_2^4} \quad (31)$$

در حالت تشدید،  $\varepsilon\rho_1 = 0$  و  $\varepsilon\rho_2 = 0$  می‌باشد و در نتیجه  $\Omega = \omega_1$  و دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی برابر است با:

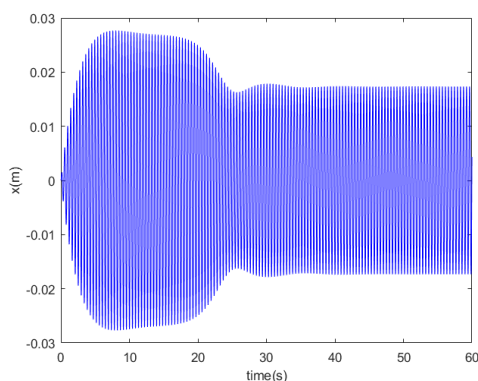
$$a = \frac{\varepsilon\zeta_2}{(\varepsilon g + \varepsilon q)} = \frac{c_2}{\sqrt{M + m + m_b} \left( \frac{6m}{5l_b} + \frac{3m_b}{8l_b} \right)} \quad (32)$$

#### ۴ ارائه نتایج و صحنه‌گذاری

در جدول ۱، مقادیر پارامترهای سیستم ارتعاشی اولیه و جاذب دینامیکی غیرخطی آمده است.

جدول ۱- پارامترهای سیستم ارتعاشی اولیه و جاذب دینامیکی غیرخطی

$M = 3 / 35.2 \text{ kg}$	$k_1 = 723 \frac{N}{m}$	$k_2 = 40970 \frac{N}{m^3}$	$k_{beam} = \frac{3EI}{l_b^3} = 10 / 997 \frac{N}{m}$
$m = 0 / 23 \text{ kg}$	$l_b = 0 / 5324 \text{ m}$	$m_b = 0 / 4 \text{ kg}$	$c_1 = 2 / 8481 \frac{N.s}{m}$
$c_2 = 0 / 072 \frac{N.s}{m}$	$F_0 = 1 / 25 \text{ N}$	$\Omega = \omega_1 = 2 / 2 \text{ Hz}$	$\omega_2 = 1 / 1 \text{ Hz}$



(الف)

شکل ۲- (الف) نمودار جابجایی نوسانگر غیرخطی تشدید شده در حالت وجود جاذب بدون در نظر گرفتن جرم تیر و صفر بودن سفتی فنر غیرخطی، (ب) نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی بدون در نظر گرفتن جرم تیر و صفر بودن سفتی فنر غیرخطی

$$\zeta_1\omega_1^2 a - \frac{1}{2}(h+p)\omega_2^2 b^2 \sin\phi_2 + \frac{1}{2}f \sin\phi_1 = 0 \quad (27)$$

$$-\frac{1}{4}(g+q)\omega_1^2 ab \cos\phi_2 + \omega_2 b \left( \frac{\rho_1}{2} + \rho_2 \right) = 0 \quad (28)$$

$$-\frac{1}{4}(g+q)\omega_1^2 ab \sin\phi_2 - \zeta_2\omega_2^2 b = 0 \quad (29)$$

با حل ۴ معادله (۲۶) تا (۲۹)، ۴ مجهول  $a$ ،  $b$ ،  $\phi_1$  و  $\phi_2$  بدست می‌آیند. دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی عبارت است از:

$$a = \frac{4\omega_2^2}{(\varepsilon g + \varepsilon q)\omega_1^2} \sqrt{\left( \frac{\omega_1 + \varepsilon\rho_1}{2\omega_2} - 1 \right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2} \quad (30)$$

دامنه ارتعاشات جاذب دینامیکی غیرخطی از حل معادله درجه

۴ زیر بدست می‌آید:

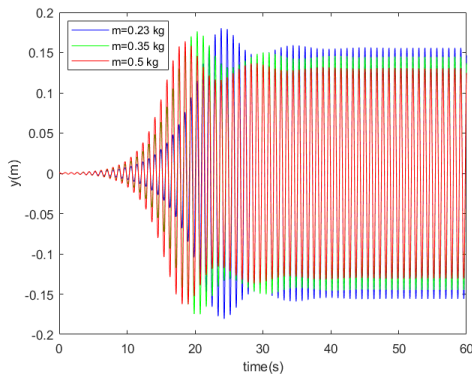
$$b^4 + Qb^2 + R = 0$$

$$Q = \frac{12\omega_2(\varepsilon\alpha)(\Omega - 2\omega_2)^3 + 48\omega_2^3(\varepsilon\alpha)(\varepsilon\zeta_2)^2(\Omega - 2\omega_2)}{(\varepsilon h + \varepsilon p)(\varepsilon g + \varepsilon q)^3\omega_1^6} \quad (30)$$

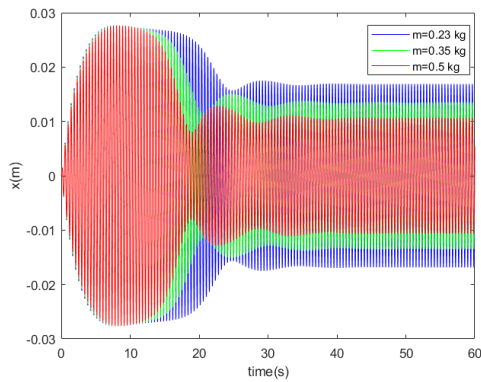
$$+ \frac{16\omega_1\omega_2(\varepsilon\zeta_1)(\varepsilon\zeta_2) - 8(\Omega - 2\omega_2)(\Omega - \omega_1)}{(\varepsilon h + \varepsilon p)(\varepsilon g + \varepsilon q)\omega_1\omega_2}$$

برای صحنه‌گذاری نتایج، در حالت خاص اگر جرم تیر یک سرگیردار را برابر صفر لحاظ نموده ( $m_b = 0$ ) و همچنین سفتی فنر غیرخطی دافینگ را نیز صفر در نظر بگیریم ( $k_2 = 0$ )، نتایج و معادلات بدست آمده در این حالت خاص با نتایج مرجع [۲۱] یکسان است. شکل زیر نمودار جابجایی سیستم ارتعاشی غیرخطی اولیه در حالت تشدید نسبت به زمان با به کار بردن جاذب دینامیکی غیرخطی و همچنین جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی نسبت به زمان در حالت بدون در نظر گرفتن جرم تیر یک سرگیردار و صفر بودن سفتی فنر غیرخطی را نشان می‌دهد که درستی نتایج با توجه به مرجع [۲۱] تأیید می‌شود.

شکل ۴، نمودار جابجایی سیستم ارتعاشی غیرخطی اولیه در حالت تشدید نسبت به زمان را با وجود جاذب دینامیکی غیرخطی و بدون در نظر گرفتن جرم تیر یک سرگیردار در جرم‌های متمرکز مختلف و همچنین نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی نسبت به زمان را در جرم‌های متمرکز مختلف نشان می‌دهد. از این نمودارها مشاهده می‌شود که با افزایش جرم متمرکز انتهای تیر یک سرگیردار به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی به طور قابل توجه باعث کاهش دامنه ارتعاش نوسانگر تشدید شده می‌شود و همچنین در مدت زمان کوتاهی باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود. با افزایش جرم متمرکز، دامنه جاذب غیرخطی نیز کاهش می‌یابد.



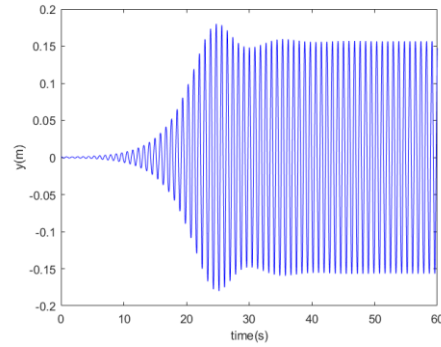
(الف)



(ب)

**شکل ۴- (الف)** نمودار جابجایی نوسانگر غیرخطی تشدید شده در حالت وجود جاذب بدون در نظر گرفتن جرم تیر در جرم‌های متمرکز مختلف، (ب) نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی بدون در نظر گرفتن جرم تیر در جرم‌های متمرکز مختلف

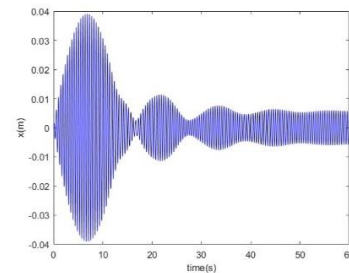
شکل ۵، نمودار جابجایی سیستم ارتعاشی غیرخطی اولیه در حالت تشدید نسبت به زمان را با وجود جاذب دینامیکی غیرخطی و بدون در نظر گرفتن جرم تیر یک سرگیردار در طول‌های مختلف تیر و همچنین نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی نسبت به زمان را در طول‌های مختلف تیر نمایش می‌دهد. از این نمودارها مشاهده می‌شود که کاهش طول تیر یک سرگیردار به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی به طور چشمگیری باعث کاهش دامنه ارتعاش



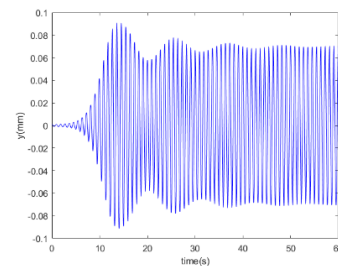
(ب)

**شکل ۲- (الف)** نمودار جابجایی نوسانگر غیرخطی تشدید شده در حالت وجود جاذب بدون در نظر گرفتن جرم تیر و صفر بودن سفتی فنر غیرخطی، (ب) نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی بدون در نظر گرفتن جرم تیر و صفر بودن سفتی فنر غیرخطی

شکل ۳، نمودار جابجایی سیستم ارتعاشی غیرخطی اولیه در حالت تشدید نسبت به زمان را با وجود جاذب دینامیکی غیرخطی و در نظر گرفتن جرم تیر یک سرگیردار و همچنین نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی نسبت به زمان را نشان می‌دهد. از این نمودارها مشاهده می‌شود که استفاده از جاذب دینامیکی غیرخطی به طور قابل توجه باعث کاهش دامنه ارتعاش نوسانگر تشدید شده می‌شود. از مقایسه شکل ۲ و ۳ نتیجه می‌شود که استفاده از جاذب دینامیکی غیرخطی با وجود جرم تیر، دامنه ارتعاش نوسانگر تشدید شده کاهش بیشتری دارد. همچنین با در نظر گرفتن جرم تیر جاذب دینامیکی غیرخطی، جابجایی جاذب کاهش می‌یابد.



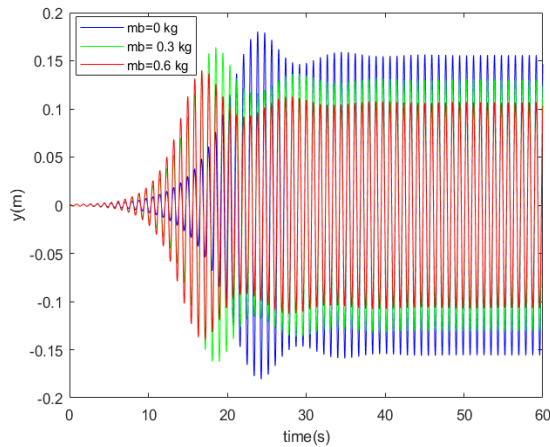
(الف)



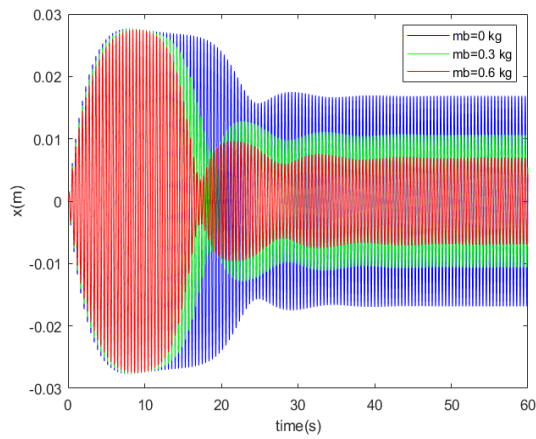
(ب)

**شکل ۳- (الف)** نمودار جابجایی نوسانگر غیرخطی تشدید شده در حالت وجود جاذب با در نظر گرفتن جرم تیر، (ب) جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی با در نظر گرفتن جرم تیر

نوسانگر تشدید شده می‌شود و همچنین در مدت زمان کوتاه‌تری باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود. با کاهش طول تیر، دامنه جاذب غیرخطی نیز به طول قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.



(الف)

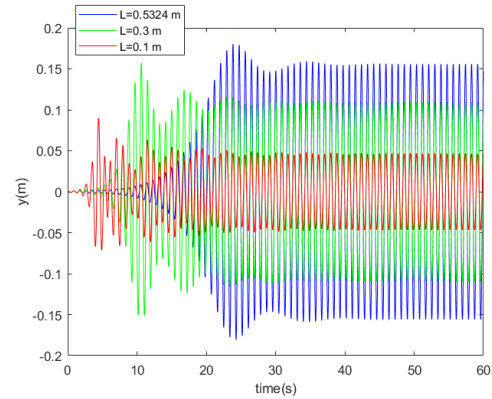


(ب)

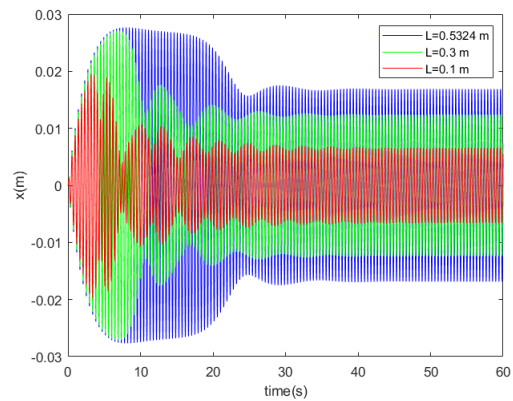
**شکل ۶-** (الف) نمودار جابجایی نوسانگر غیرخطی تشدید شده در حالت وجود جاذب در جرم‌های مختلف تیر، (ب) نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی در جرم‌های مختلف تیر

از مقایسه شکل‌های ۴ و ۵ و ۶ مشاهده می‌شود که از پارامترهای یک جاذب دینامیکی غیرخطی، کاهش طول تیر، تأثیر بیشتری در کاهش دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی تشدید شده خواهد داشت. همچنین در حالت کاهش طول تیر، زمان لازم برای کاهش دامنه ارتعاشات، کوتاه‌تر خواهد بود.

به‌طور کلی با افزایش سفتی فنر خطی، دامنه نوسانگر غیرخطی تشدید شده کاهش می‌یابد. شکل ۷، تغییرات دامنه سیستم اولیه غیرخطی بر حسب سفتی فنر در جرم‌های متمرکز مختلف را نشان می‌دهد. طبق این نمودار، افزایش جرم متمرکز انتهای تیر یک سرگردار باعث کاهش دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی تشدید شده می‌شود.



(الف)

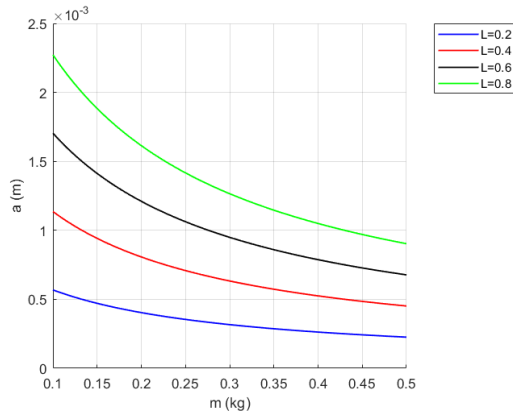


(ب)

**شکل ۷-** (الف) نمودار جابجایی نوسانگر غیرخطی تشدید شده در حالت وجود جاذب بدون در نظر گرفتن جرم تیر در طول‌های مختلف تیر، (ب) نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی بدون در نظر گرفتن جرم تیر در طول‌های مختلف تیر

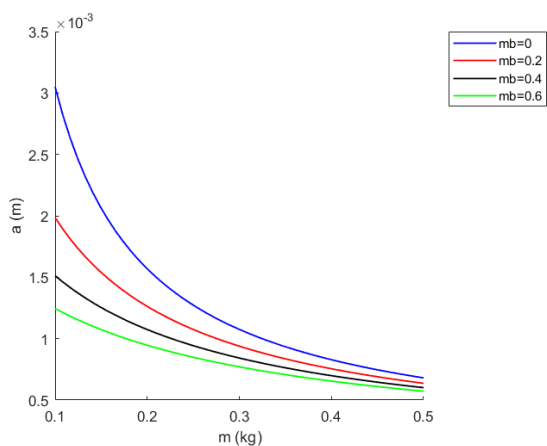
شکل ۶، نمودار جابجایی سیستم ارتعاشی غیرخطی اولیه در حالت تشدید نسبت به زمان را با وجود جاذب دینامیکی غیرخطی در جرم‌های مختلف تیر یک سرگردار و همچنین نمودار جابجایی جاذب دینامیکی غیرخطی نسبت به زمان را در جرم‌های مختلف تیر نشان می‌دهد. از این نمودارها مشاهده می‌شود که افزایش جرم تیر یک سرگردار به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی باعث کاهش دامنه ارتعاش نوسانگر تشدید شده می‌شود و همچنین در مدت زمان کمتری دامنه ارتعاشات کاهش می‌یابد. با افزایش جرم تیر، دامنه جاذب غیرخطی نیز کمتر می‌شود.

شکل ۱۰، تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب جرم متمرکز انتهای تیر در طول‌های مختلف تیر یک سرگیردار به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی را نمایش می‌دهد. از این نمودار مشاهده می‌شود که کمترین دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی زمانی است که جرم متمرکز انتهای تیر بیشترین مقدار بوده و طول تیر یک سرگیردار کمترین مقدار باشد.



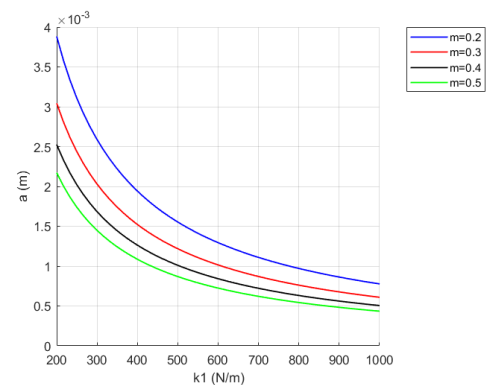
شکل ۱۰- نمودار تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب جرم متمرکز انتهای تیر جاذب غیرخطی در طول‌های مختلف تیر یک سرگیردار

شکل ۱۱، تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب جرم متمرکز انتهای تیر در جرم‌های مختلف تیر یک سرگیردار به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی را نمایش می‌دهد. از این نمودار مشاهده می‌شود که کمترین دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی زمانی است که جرم متمرکز انتهای تیر و جرم تیر یک سرگیردار بیشترین مقدار باشند.



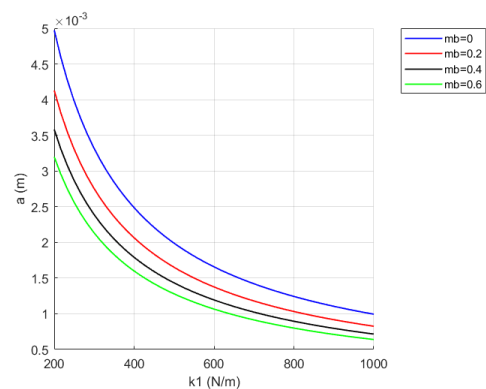
شکل ۱۱- نمودار تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب جرم متمرکز انتهای تیر جاذب غیرخطی در طول‌های مختلف تیر یک سرگیردار

شکل ۱۲، تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب جرم تیر یک سرگیردار را در طول‌های مختلف تیر یک سرگیردار به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی را نمایش می‌دهد. از این نمودار مشاهده



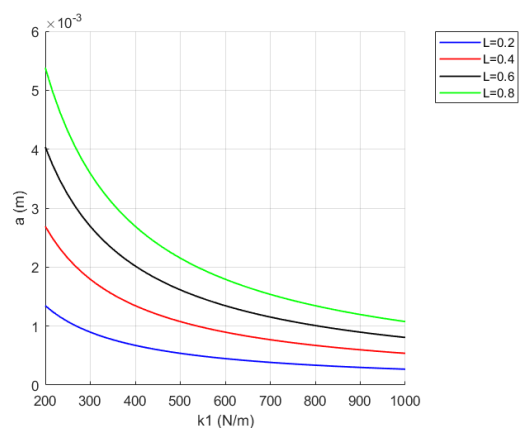
شکل ۷- نمودار تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب سفتی فنر در جرم‌های متمرکز مختلف

شکل ۸، تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب سفتی فنر در جرم‌های مختلف تیر یک سرگیردار به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی را نمایش می‌دهد. از این نمودار مشاهده می‌شود که افزایش جرم تیر سبب کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود.



شکل ۸- نمودار تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب سفتی فنر در جرم‌های مختلف تیر یک سرگیردار

شکل ۹، تغییرات دامنه سیستم اولیه غیرخطی بر حسب سفتی فنر در طول‌های مختلف تیر یک سرگیردار را به عنوان جاذب دینامیکی غیرخطی نشان می‌دهد. طبق این نمودار، کاهش طول تیر باعث کاهش دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی می‌شود.



شکل ۹- نمودار تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب سفتی فنر در طول‌های مختلف تیر یک سرگیردار

## ۶ نتیجه گیری

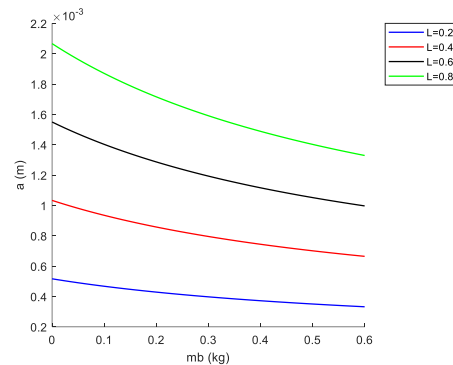
در این مقاله، فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارای جرم متصله، با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی، بررسی شده است. همچنین جهت تخمین فشار آیرودینامیکی از تئوری مرتبه اول پیستون استفاده گردیده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات این سیستم دینامیکی بر اساس اصل همپلتون استخراج شده است و سپس با حل معادلات به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در نهایت فرکانس طبیعی سیستم دینامیکی و فشار آیرودینامیکی وقوع پدیده فلاتر بدست آمده است. شرایط مرزی مختلف و اثرات توزیع نانولوله کربنی بر رفتار پدیده فلاتر و اثرات ناپایداری سازه بررسی شده است. نتایج زیر حاصل شده است:

- ۱- با حرکت جرم متصل به تیر یکسرگردار از ابتدای تیر به مرکز تیر، فرکانس طبیعی ارتعاشات تیر کاهش پیدا می‌کند.
- ۲- فرکانس بی بعد با توزیع یکنواخت در کلیه شرایط مرزی با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس کاهش پیدا می‌کند.
- ۳- تغییرات فرکانس ویژه تیر تقویت شده با نانولوله کربنی و جرم متصله با شرایط تکیه گاهی یکسرگردار و الگوی توزیع یکنواخت در نانو لوله‌های کربنی، در مقایسه با الگوی کاهشی-افزایشی، بیشترین تغییرات را دارد.
- ۴- پدیده فلاتر برای تیر یکسرگردار با توزیع کاهشی-افزایشی نسبت به توزیع یکنواخت مطلوب تر می‌باشد.
- ۵- برای تیر تقویت شده با نانولوله کربنی و جرم متصله با توزیع یکنواخت و شرایط تکیه گاهی یکسر گردار در مقایسه با تیر با شرایط تکیه گاهی دو سر ساده و یکسر گردار-یکسر ساده، فلاتر زودتر رخ داده است.
- ۶- با ترسیم تغییرات فرکانس ویژه تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی با جرم متصله برای  $V_{CN}^*$  مختلف، مشخص شد که با افزایش  $V_{CN}^*$  فلاتر دیرتر رخ می‌دهد.

## ۷ منابع

- [1] H. Abundis-Fong, J. Enríquez-Zárate, A. Cabrera-Amado, and G. Silva-Navarro, "Optimum design of a nonlinear vibration absorber coupled to a resonant oscillator: A case study," *Shock and Vibration*, vol. 2018, 2018.
- [2] A. Haris, P. Alevras, M. Mohammadpour, S. Theodossades, and M. O'Mahony, "Design and validation of a nonlinear vibration absorber to attenuate torsional oscillations of propulsion systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 100, pp. 33-49, 2020.
- [3] B. Vazquez-Gonzalez and G. Silva-Navarro, "Evaluation of the autoparametric pendulum vibration absorber for a Duffing system," *Shock and Vibration*, vol. 15, no. 3-4, pp. 355-368, 2008.

می‌شود که کمترین دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی زمانی است که جرم تیر بیشترین مقدار و طول تیر کمترین مقدار باشند. برای این منظور باید جنس تیر از ماده‌ای با چگالی بالا انتخاب شود.



شکل ۱۲- نمودار تغییرات دامنه نوسانگر غیرخطی بر حسب جرم تیر در طول‌های مختلف تیر یک سرگردار جاذب غیرخطی

## ۵ جمع بندی

در این مقاله از یک جاذب دینامیکی غیرخطی برای کاهش دامنه ارتعاش یک سیستم غیرخطی استفاده می‌شود. برای جاذب دینامیکی غیرخطی از یک تیر یک سرگردار و یک جرم متمرکز در انتهای آن استفاده شده است. پس از مدل‌سازی سیستم و استخراج انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم، معادلات حاکم بر حرکت استخراج می‌شوند. برای حل معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌گردد. مطابق نتایج حاصل از این پژوهش می‌توان نتایج زیر را استخراج نمود:

- ۱- برای کاهش دامنه ارتعاشات سیستم ارتعاشی اولیه بایستی جرم متمرکز انتهای تیر یک سرگردار افزایش، جرم تیر یک سرگردار افزایش و طول تیر یک سرگردار کاهش یابد.
  - ۲- کاهش طول تیر یک سرگردار در میان پارامترهای یک جاذب دینامیکی غیرخطی، تأثیر قابل توجهی در کاهش دامنه ارتعاشات نوسانگر غیرخطی تشدید شده خواهد داشت.
  - ۳- کاهش طول تیر، زمان لازم برای کاهش دامنه ارتعاش نوسانگر غیرخطی تشدید شده را کوتاه‌تر خواهد نمود.
  - ۴- نتایج حاصل از حل عددی معادلات غیرخطی حاکم نشان می‌دهد که جاذب دینامیکی غیرخطی به طور مطلوب باعث کاهش دامنه ارتعاشات نوسانگر تشدید شده می‌شود.
- با در نظر گرفتن جرم تیر جاذب دینامیکی غیرخطی، دامنه ارتعاشات سیستم ارتعاشی اولیه در حالت تشدید، کاهش بیشتری خواهد داشت.

- [12] S. F. Ali and S. Adhikari, "Energy harvesting dynamic vibration absorbers," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 80, no. 4, p. 041004, 2013.
- [13] G. Habib, T. Detroux, R. Vigué, and G. Kerschen, "Nonlinear generalization of Den Hartog's equal-peak method," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 52, pp. 17-28, 2015.
- [14] C. Wang, "The hanging column as a dynamic vibration absorber," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 18, no. 07, p. 1871008, 2018.
- [15] R. Fosdick and Y. Ketema, "A thermoviscoelastic dynamic vibration absorber," 1998.
- [16] J. Bonsel, R. Fey, and H. Nijmeijer, "Application of a dynamic vibration absorber to a piecewise linear beam system," *Nonlinear Dynamics*, vol. 37, pp. 227-243, 2004.
- [17] Y. Cheung and W. Wong, "Design of a non-traditional dynamic vibration absorber," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 126, no. 2, pp. 564-567, 2009.
- [18] M. A. KAMRAN, G. REZAZADEH, and S. GHAFFARI, "An investigation on optimal designing of dynamic vibration absorbers using genetic algorithm," *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi*, vol. 36, no. 3, pp. 765-779, 2015.
- [19] M. Febbo and S. P. Machado, "Nonlinear dynamic vibration absorbers with a saturation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, no. 6, pp. 1465-1483, 2013.
- [20] N. Wagner and R. Helfrich, "Dynamic vibration absorbers and its applications," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 354, p. 6, 2017.
- [4] G. Silva-Navarro and H. F. Abundis-Fong, "Passive/active autoparametric cantilever beam absorber with piezoelectric actuator for a two-story building-like structure," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 137, no. 1, 2015.
- [5] Y. Chang, J. Zhou, K. Wang, and D. Xu, "A quasi-zero-stiffness dynamic vibration absorber," *Journal of sound and vibration*, vol. 494, p. 115859, 2021.
- [6] Y. Liu, W. Ji, L. Xu, H. Gu, and C. Song, "Dynamic characteristics of quasi-zero stiffness vibration isolation system for coupled dynamic vibration absorber," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 91, no. 9, pp. 3799-3818, 2021.
- [7] Y. Chang, J. Zhou, K. Wang, and D. Xu, "Theoretical and experimental investigations on semi-active quasi-zero-stiffness dynamic vibration absorber," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 214, p. 106892, 2022.
- [8] T. Asami, "Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers arranged in series or in parallel," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 139, no. 1, 2017.
- [9] N. Anh and N. X. Nguyen, "Design of non-traditional dynamic vibration absorber for damped linear structures," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 228, no. 1, pp. 45-55, 2014.
- [10] C. Yang, D. Li, and L. Cheng, "Dynamic vibration absorbers for vibration control within a frequency band," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 8, pp. 1582-1598, 2011.
- [11] Y.-R. Wang and T.-H. Kuo, "Effects of a dynamic vibration absorber on nonlinear hinged-free beam," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 142, no. 4, p. 04016003, 2016.