



تحلیل فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله کربنی دارای جرم متصله تحت جریان مافوق صوت

رضا معبودی^۱، حسن شکراللهی^{۲*}، مصطفی اسماعیلی^۳

۱- کارشناسی ارشد، دپارتمان مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

۲- استادیار، دپارتمان مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

۳- استادیار، دپارتمان مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

* نویسنده مخاطب: hshokrollahi@khu.ac.ir

در این مقاله فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارای جرم متصله تحلیل و ارائه می‌شود. ناپایداری آیرودلاستیک یک تیر با مقطع مستطیل شکل با شرایط تکیه‌گاهی مختلف به همراه اثرات جرم متصله بررسی شده است. همچنین تیر با تئوری مرتبه اول برشی و با در نظر گرفتن اثرات تقویت کننده نانولوله کربنی در نظر گرفته شده است و برای تخمین فشار آیرودینامیکی از تئوری پیستون استفاده گردیده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات این سیستم دینامیکی بر اساس اصل همپلتون تعیین گردیده است و سپس با حل معادلات به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در نهایت فرکانس طبیعی سیستم دینامیکی مذکور محاسبه گردید. همچنین در این مقاله، اثرات تقویت کننده نانولوله کربنی و جرم متصله بر فرکانس و پایداری تیر پرداخته شده است. وجه تمایز این پژوهش با کارهای پیشین، در نظر گرفتن ترکیب دو اثر تقویت کننده نانولوله کربنی در تیر (با توزیع‌های مختلف در راستای ضخامت) و جرم متصله به تیر، به صورت همزمان است. نتایج نشان می‌دهد فرکانس بی بعد با توزیع یکنواخت در کلیه شرایط مرزی با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس کاهش پیدا می‌کند، همچنین پدیده فلاتر برای تیر یکسرگیردار با توزیع کاهشی-افزایشی نسبت به توزیع یکنواخت مطلوب تر می‌باشد، و با حرکت جرم برای تیر یکسرگیردار از ابتدای تیر به مرکز تیر فرکانس کاهش پیدا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: فلاتر، تیر کامپوزیتی، نانولوله کربنی، جرم متصله

Flutter Analysis of a CNT-Reinforced Composite Beam Carrying an Attached Mass in the Supersonic Flow

R. Maboudi¹, H. Shokrollahi^{2*}, M. Esmaili³

1 M. Sc. Department of Mechanical Engineering, University of Technology and Engineering, Khwarazmi University, Tehran, Iran

2* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Technology and Engineering, Khwarazmi University, Tehran, Iran

3 Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Technology and Engineering, Khwarazmi University, Tehran, Iran

*Corresponding Author: hshokrollahi@khu.ac.ir

In this paper, the flutter analysis of a CNT-reinforced composite beam carrying an attached mass in the supersonic flow under different boundary conditions is presented. The beam cross section assumed to be rectangular. Also, the analysis of the mentioned beam has been investigated taking into account of the first-order shear deformation theory and considering the reinforcing effects of carbon nanotubes. The aerodynamic Piston theory has been used to estimate the aerodynamic pressure. The equations governing the vibrations of this dynamic system have been determined based on the Hamilton principle. Then, by solving the equations using the generalized differential quadrature method, the natural frequencies of the dynamic system are calculated. Analysing the combined effects of CNT and attached mass on the beam, is the main feature of this research. In this work, the results have been compared and validated with similar studies. Then, the effects of carbon nanotube reinforcement and the effects of the attached mass on the frequency and stability of the beam have been investigated. The obtained results show that for uniform distribution of CNT the non-dimensional frequency decreases by increasing the ratio of length to thickness for all boundary conditions.

Keywords: Flutter, composite beam, carbon nanotube, attached mass.

۱ مقدمه

یکی از پدیده‌های آیرودینامیک است که در کاربردهای متفاوت مهندسی هوافضا دیده می‌شود، پدیده فلاتر است. فلاتر نوعی ناپایداری دینامیکی وسیله پرنده است که از برهم کنش نیروهای اینرسی، آیرودینامیکی و الاستیکی به وجود می‌آید، و باعث تغییر فرم دینامیکی سازه می‌گردد. این پدیده یک نوع ارتعاشات ناپایدار خود تحریک است که در آن سازه انرژی مورد نیاز خود را از جریان سیال می‌گیرد و معمولاً منجر به شکست اتفاقی سازه می‌گردد. فلاتر زمانی اتفاق می‌افتد که نیروهای آیرودینامیکی مربوط به دو مود ارتعاشی با یکدیگر ترکیب شوند. موضوع مورد بررسی در مطالعه حاضر، بررسی فلاتر در ترکیبی از تیرهای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و تیرهای همراه با جرم متصله می‌باشد.

نانولوله‌های کربنی از صفحات کربن با ضخامتی در حدود یک اتم کربن که به صورت استوانه توخالی می‌باشد، تشکیل شده‌اند. اولین بار در سال ۱۹۹۱ توسط دانشمند ژاپنی ایچیمای [۱] در طی آزمایشی آن را کشف نمود. نانولوله‌های کربنی دارای ساختار شش ضلعی از پیوند اتم‌های کربن هستند که به صورت تک جداره و چند جداره یافت می‌شوند. لازم به ذکر است که توزیعات نانولوله‌ها در راستای ضخامت به صورت یکی از انواع UD، FG-V، FG-A، FG-O و FG-X می‌باشد. از خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی می‌توان به مدول الاستیک و مقاومت کششی بالا اشاره کرد. از طرفی کربنی بودن نانولوله‌ها و اینکه کربن ماده‌ای سبک و بسیار پایدار می‌باشد، باعث شده در سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای جهت بهبود کارایی و روش‌های تولید نانولوله‌های کربنی انجام پذیرد. آنوماندا و گیبسون^۱ در سال ۲۰۰۶ پژوهشی بر روی خصوصیات ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از یک مدل میکرو مکانیک انجام داده‌اند که نتیجه این پژوهش یک مفهوم کلی برای تخمین مدول الاستیک بوده است [۲]. همچنین، در برخی از کارهای تحقیقاتی با استفاده از شبیه سازی دینامیکی ملکولی، خصوصیات الاستیک ماده کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله کربنی تخمین زده شده است [۳-۵]. در سال ۲۰۱۲ یاس و حشمتی در پژوهشی خصوصیات ارتعاشاتی تیر از جنس نانو کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار حرکتی مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مطالعه تئوری تیر تیموشنکو و تئوری تیر اویلر-برنولی برای محاسبات دینامیکی تیر مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین روش حل روش المان محدود برای حل معادلات حرکت استفاده شده است [۶].

لیو و همکاران [۷] در سال ۲۰۱۵ در یک مطالعه مروری، به بررسی پژوهش‌های انجام شده در حوزه مواد کامپوزیت تقویت شده

با نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند. در این مطالعه خواص ماده کامپوزیت، رفتار استاتیکی، رفتار دینامیکی و رفتار ارتعاشاتی برای اشکال تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها ارائه شده است [۷]. مرور کارهای جدیدتر را می‌توان در مراجع [۸، ۹] یافت.

اسدی و وانگ [۱۰] در سال ۲۰۱۷ ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی را بررسی کردند. معادلات حاکم بر اساس اصل همپلتون^۲ و تئوری مرتبه اول بررشی استخراج شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که پارامترهایی مانند کسر حجمی نانولوله، نسبت طول به ضخامت، توزیع نانولوله‌های کربنی و عدد ماخ در مرزهای پایداری، فشار آیرودینامیکی بار بحرانی حاصل از کماتش را افزایش می‌دهد.

در سال ۲۰۱۹ حیدری و آروین^۳ [۱۱] به بررسی ارتعاشات آزاد خطی و غیرخطی تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی پرداختند. آن‌ها بر اساس فرضیات تئوری تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن رابطه کرنش-جابجایی غیرخطی ون کارمن و خواص موثر مواد کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله کربنی با استفاده از مدل موری-تاناکا و قانون مخلوط توسعه یافته، تحلیل خود را انجام دادند. نتایج برای بررسی اثرات کسر حجمی نانولوله، انواع توزیع نانولوله کربنی و سرعت چرخش بر روی ویژگی‌های ارتعاش آزاد خطی و غیرخطی تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی ارائه شده است.

محمدی مهر و همکارانش [۱۲] در سال ۲۰۲۰ به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ویسکوالاستیک تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره پرداختند. خواص مواد تیر میکروکامپوزیت با قانون تعمیم یافته مخلوط تخمین زده شده است. نتایج نشان می‌دهد که کمترین دامنه ارتعاش تیر میکروکامپوزیت با توزیع FG-X و بیشترین دامنه با توزیع FG-O رخ می‌دهد.

باتوجه به اهمیت پدیده فلاتر، تحقیقات فراوانی در این حوزه صورت گرفته است [۱۳-۱۶]. سانگ و همکارانش [۱۳] پنل‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مورد بررسی قرار دادند. آنها از تئوری برشی مرتبه بالا در تحلیل خود استفاده کردند. بهاراتی و همکارانش [۱۵] تیرهای کامپوزیتی را مورد مطالعه قرار دادند. موسوی و یزدی [۱۶] در پژوهشی به فلاتر تیرها و ورق‌های کامپوزیتی پرداختند. آنها اثرات پارامترهای مختلف از جمله درصد وزنی نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند و نتیجه گرفتند که با افزودن مقدار کمی نانولوله کربنی (۴ درصد وزنی) به ماتریس اپوکسی^۴، فشار بحرانی فلاتر ۳۳ درصد در مقایسه با اپوکسی تقویت نشده افزایش می‌یابد.

در بسیاری از کاربردهای مکانیک، زیر سازه‌هایی به سازه اصلی اضافه می‌شوند. مسئله تیر یا ورق‌هایی که اجسام متصله

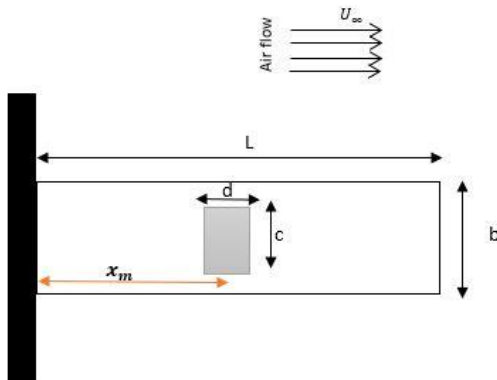
3. Arvin
5. Epoxy matrix

1. Anumandella and Gibson
2. Hamilton

برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای مختلف و اثرگذار بر فرکانس ارتعاشات سازه و پدیده فلاتر مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

۲ معادلات حاکم

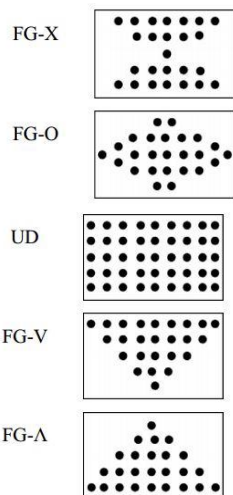
شکل ۱ نمایی از هندسه تیر با جرم افزوده با ابعاد L و b و ضخامت یکنواخت h را نشان می‌دهد. هوای مافوق صوت در راستای محور x جریان دارد. اندازه هندسی جرم متصله با c و d و موقعیت تکیه‌گاه تا مرکز آن با x_m مشخص شده است.



شکل ۱- هندسه تیر با جرم متصله

۱.۲ خواص مکانیکی مواد

الگوهای توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت شامل توزیع یکنواخت (UD)، و چهار نوع توزیع هدمفند: FG-O، FG-X، FG-A و V در نظر گرفته شده است و در شکل ۲ آمده است.



شکل ۲- انواع توزیع نانولوله‌ها [۲۱]

از قانون مخلوط‌ها برای تخمین زدن خواص مواد تقویت کننده با نانولوله‌های کربنی استفاده شده است. بر اساس این روش مدول یانگ و مدول برشی را می‌توان به صورت معادله (۱) نوشت:

گسترده بر روی آنها بود، اولین بار در سیستم‌های الکترونیکی مورد توجه قرار گرفت. این اجسام متصله بر روی پاسخ کلی سیستم تاثیرگذار هستند. در موارد دیگری همچون ماهواره‌ها و موشک‌ها، جرم متصله گسترده حمل می‌کنند. یا به عنوان مثال بال هواپیما به صورت ورق یا یک تیر یکسرگیردار در نظر گرفته شده که سوخت هواپیما به عنوان جرم گسترده در حال تغییر و یا موتور آن به صورت جرم متمرکز بر روی بال می‌باشد. اسماعیلی و آروین [۱۷] ارتعاشات غیرخطی تیرهای کامپوزیتی یکسرگیردار را با جرم متمرکز در انتها، تحت تحریک نیروی هارمونیک بررسی کرده‌اند. معادلات حرکت حاکم با استفاده از روش فرمول‌بندی دقیق هندسی استخراج گردیده است. به منظور مدل‌سازی خواص مکانیکی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از مدل موری-تاناکا استفاده گردیده است. پاسخ فرکانسی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه استخراج گردیده است. همچنین، به بررسی تاثیر میزان جرم متمرکز، درصد نانولوله کربنی و نیروی هارمونیک بر پاسخ فرکانسی پرداخته شده است.

کوپماز و تلی [۱۸] در مقاله‌ای به بررسی ارتعاشات آزاد صفحه مستطیلی دارای جرم گسترده پرداختند. تئوری مورد استفاده در این مقاله برای صفحه، تئوری کلاسیک می‌باشد و اثر جرم گسترده با استفاده از ترکیب چند تابع هویساید به معادله اصلی اضافه شده است. یکی از مهمترین فرضیات آن‌ها این بود که فرض کردند جرم متصله ممانعتی برای خمش جزء ورق که به آن متصل است ایجاد نمی‌کند. به بیان دیگر جرم متصله می‌تواند به شکل ورق در منطقه اتصال در بیاید. در سال ۲۰۱۴ مردانیپور و ریچارد [۱۹] اثرات قرارگیری چند موتور بر روی بال هواپیما را مورد بررسی قرار دادند. آنها چهار موتور یکسان با جرم و زاویه مشخص را در موقعیت‌های مختلف طولی بال قرار دادند و نتیجه گرفتند که قرار دادن چندین موتور سرعت فلاتر را افزایش می‌دهد؛ به خصوص زمانی که موتورها در قسمت بیرونی بال قرار گیرند. جمشید و وحدت آزاد [۲۰] به رفتار فلاتر بال کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارای جرم متصله به شکل یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی یک سرگیردار پرداختند. آنها از تئوری برشی مرتبه اول در تحلیل فلاتر استفاده کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد که با افزایش نسبت جرمی و کاهش زاویه جهت‌گیری الیاف نانولوله کربنی، مرز فلاتر بال کاهش می‌یابد. همچنین، با زیاد شدن زاویه جهت‌گیری الیاف نانولوله کربنی در کامپوزیت پاد متقارن مرز فلاتر افزایش می‌یابد.

همانطور که مرور مراجع نشان می‌دهد، در پژوهش‌های پیشین، ترکیب دو اثر تقویت کننده نانولوله کربنی در تیر (با توزیع‌های مختلف در راستای ضخامت) و جرم متصله به تیر، به صورت همزمان در نظر گرفته نشده که در پژوهش فعلی با جزئیات کامل

بر اساس تئوری مرتبه اول برشی، روابط کرنش - جابجایی به صورت معادله (۶) بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{الف-۶})$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi \right) \quad (\text{ب-۶})$$

یا به طور خلاصه:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1 \quad (\text{الف-۷})$$

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad (\text{ب-۷})$$

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi \right)$$

روابط کرنشی به صورت ماتریسی به فرم زیر قابل بیان است:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۸)$$

معادله حرکت سازه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از اصل همپلتون، به صورت معادله (۹) و (۱۰) به دست می‌آید:

$$\delta \pi = \delta(U + V - K) \quad (۹)$$

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (۱۰)$$

که در آن V کار انجام شده به وسیله نیروی خارجی به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta V = - \int_0^l q(x) \delta w_0 dx \quad (۱۱)$$

انرژی کرنشی در تیر کامپوزیتی به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta U = \int_0^l \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) d_A dx \quad (۱۲)$$

انرژی جنبشی تیر کامپوزیتی براساس روابط انرژی به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta K = \int_0^l \int_A \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) d_A dx \quad (۱۳)$$

$$\delta K = \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho [(\dot{u}_0 + z \dot{\phi})(\delta \dot{u}_0 + z \delta \dot{\phi}) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] d_z dx \quad (۱۴)$$

که در آن، جملات ممان اینرسی به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m \quad (\text{الف-۱})$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (\text{ب-۱})$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (\text{ج-۱})$$

در معادله (۱)، E_{22}^{CN} ، E_{11}^{CN} ، مدول یانگ نانولوله کربنی در دو راستا، G_{12} مدول برشی نانولوله کربنی، و E^m و G^m نیز خواص مرتبط با ماتریس می‌باشند. به علاوه، $\eta_j (j=1,2,3)$ پارامتر کارایی نانولوله کربنی می‌باشد. همچنین، V_m و V_{CN} به ترتیب کسر حجمی ماتریس و نانولوله کربنی می‌باشد که از رابطه ۲ تبعیت می‌کند و در جدول ۱ ارائه شده است.

$$1 = V_{CN} + V_m \quad (۲)$$

چگالی جرمی و نسبت پواسون موثر مواد مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به ترتیب، به صورت معادله (۳) و (۴) می‌باشند.

$$\rho = V_{CN}^* \rho^{CN} + V_m \rho^m \quad (۳)$$

$$\nu_{12} = V_{CN} \nu_{12}^{CN} + V_m \nu^m \quad (۴)$$

جدول ۱- توابع کسر حجمی نانولوله‌های کربنی [۲۲-۲۴]

$V_{CN}(Z) = V_{CN}^*$	حالت یکنواخت
$V_{CN}(Z) = V_{CN}^* \left(1 + 2 \frac{Z}{h}\right)$	حالت کاهشی
$V_{CN}(Z) = V_{CN}^* \left(1 - 2 \frac{ Z }{h}\right)$	حالت افزایشی - کاهشی
$V_{CN}(Z) = 4V_{CN}^* \left(\frac{ Z }{h}\right)$	حالت کاهشی - افزایشی

که در آن، ρ^{CN} ، ν_{12}^{CN} ، ρ^m و ν^m به ترتیب چگالی و نسبت پواسون برای نانولوله کربنی (تقویت کننده) و ماتریس هستند.

۲.۲ مدل سازی سازه و فشار سیال

در این مطالعه، تئوری مرتبه اول برشی برای تیر مدرج تابعی اعمال شده است. میدان جابجایی تیر به صورت معادله (۵) می‌باشد:

$$u(x,z,t) = u_0(x,t) + z \phi(x,t) \quad (\text{الف-۵})$$

$$w(x,z,t) = w_0(x,t) \quad (\text{ب-۵})$$

که در آن u و w به ترتیب جابجایی‌ها در راستای x و z است.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11}(z)\varepsilon_x; \quad \tau_{xz} = Q_{55}(z)\gamma_{xz} \\ Q_{11}(z) &= \frac{E_{11}(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}; \\ Q_{55}(z) &= G_{12}(z) \end{aligned} \quad (23)$$

همچنین، برایندهای تنش N_x ، M_x و Q_x به شرح زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 \\ B_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ K_S \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

همچنین فاکتور تصحیح برشی برابر است با $K_S = 5/6$. پارامترهای سفتی خمشی، کوپلینگ و کششی به ترتیب A_{55} ، A_{11} ، B_{11} و D_{11} به شرح زیر محاسبه می‌گردد:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2) dz \quad (25)$$

$$A_{55} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} dz \quad (26)$$

۳.۲ حل معادلات

برای تحلیل مساله فلاتر، روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته استفاده شده است. در این روش، مشتق مرتبه m تابع $f(x)$ در نقطه x_i برابر است با:

$$f^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^N C_{i,j}^{(m)} f(x_j); \quad i = 1 \dots N \quad (27)$$

که در آن، $f^{(m)}(x_i)$ مشتق مرتبه m تابع $f(x)$ در نقطه x_i و $C_{i,j}^{(m)}$ ضرایب وزنی هستند. برای تعیین این ضرایب وزنی از چند جمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ استفاده می‌شود:

$$g_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k}; \quad j = 1 \dots N \quad (28)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} M(x) &= \prod_{k=1}^N (x - x_k); \quad M^{(1)}(x_j) \\ &= \prod_{k=1, k \neq j}^N x_j - x_k \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dz \quad (15)$$

با اضافه کردن جرم گسترده به تیر کامپوزیتی و صرفنظر از سفتی جرم متصله خواهیم داشت:

$$k_{mass} = \frac{1}{2} \int \rho_m (\dot{w})^2 dA \quad (16)$$

$$\delta K_{tot} = \delta K_b + \delta K_{mass} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \delta K_{tot} dt \\ &= - \int_0^t [b \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) dx dz \\ &+ H \int_{y_m - d/2}^{y_m + d/2} \int_{x_m - c/2}^{x_m + c/2} \bar{\rho} (\ddot{w} \delta w) dy dx] dt \end{aligned} \quad (18)$$

همچنین، فشار آیرودینامیک است [۲۵، ۲۶] که با تئوری پیستون مرتبه اول در جریان خطی به دست آمده است و مطابق معادله (۱۹) ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که جهت جریان در راستای محور x بوده که در شکل ۱ نیز نشان داده شده است.

$$\Delta p = -\lambda_\infty \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{U_\infty} \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (19)$$

که در آن:

$$\lambda_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

در معادله (۱۹)، ρ_∞ ، U_∞ و M به ترتیب چگالی، سرعت و عدد ماخ در جریان آزاد هستند.

با اعمال اصل همپلتون، معادلات اوپرلاگرانژ مربوط به ضرایب δw_0 ، δu_0 و $\delta \phi$ به این صورت خواهد بود:

$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0: \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \Delta p \\ = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} H(x, y, x_0, y_0) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\delta \phi: \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - \phi_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (22)$$

مولفه‌های تنش برای تیر تقویت شده با نانولوله کربنی برای جملات کرنش به صورت زیر می‌باشد:

در ابتدا به منظور صحت سنجی و ارزیابی روش حل، نتایج با مطالعات پیشین مقایسه می‌شود.

خواص مکانیکی تیر کامپوزیتی به صورت $\rho^m = 1190 \text{ kg/m}^3$ ، $E^m = 2.5 \text{ GPa}$ و $\nu^m = 0.3$ در نظر گرفته شده است. خواص نانولوله کربنی به صورت $E_{11}^{CN} = 600 \text{ GPa}$ ، $\nu^{CN} = 0.19$ ، $\rho^{CN} = 1400 \text{ kg/m}^3$ و $E_{22}^{CN} = 10 \text{ GPa}$ ، $G_{12}^{CN} = 17.2 \text{ GPa}$ در نظر گرفته شده است.

همچنین در جدول ۲، پارامترهای موثر نانولوله کربنی برای سه درصد حجمی مختلف ارائه شده است.

جدول ۲- پارامتر موثر نانو کامپوزیت‌ها برحسب کسر حجمی نانولوله‌ها

V_{CN}^*	η_1	η_2	η_3
۰/۱۲	۱/۲۸۳۳	۱/۰۵۵۶	۱/۰۵۵۶
۰/۱۷	۱/۳۴۱۴	۱/۷۱۰۱	۱/۷۱۰۱
۰/۲۸	۱/۳۲۳۸	۱/۷۳۸۰	۱/۷۳۸۰

در جدول ۳، فرکانس طبیعی بی بعد برای یک تیر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با مشخصات $L/h=10$ و $V_{CN}^*=0/12$ با سه الگوی یکنواخت، کاهشی-افزایشی و افزایشی-کاهشی در شرایط مرزی مختلف با نتایج بدست آمده توسط صمدی و یاس [۲۷] و اسدی و وانگ [۱۰] که بر اساس تئوری مرتبه اول برشی محاسبه شده اند، مقایسه می‌شود. همچنین، مقایسه نتایج فشار بحرانی فلاتر در جدول ۴ در مقایسه با نتایج اسدی و وانگ [۱۰] ارائه شده است.

جدول ۳- مقایسه نتایج فرکانس طبیعی بی بعد تیر نانو لوله کربنی، با $0/12$ V_{CN}^* $L/h=10$.

شرایط مرزی	S-S	C-S	C-C	C-F
روش حاضر UD	۱/۲۵۷۹	۱/۴۵۶۰	۱/۶۶۸۰	۰/۵۲۲۷
اسدی و وانگ [۱۰]	۱/۲۵۸۰	۱/۴۵۳۷	۱/۶۶۲۷	-
یاس و صمدی [۲۷]	۱/۲۵۸۱	۱/۴۵۶۵	۱/۶۶۹۱	-
روش حاضر FG-X	۱/۳۸۴۵	۱/۵۳۹۱	۱/۷۲۵۶	۰/۵۹۷۰
اسدی و وانگ [۱۰]	۱/۳۸۳۹	۱/۵۳۵۰	۱/۷۱۶۵	-
یاس و صمدی [۲۷]	۱/۳۸۵۹	۱/۵۳۹۴	۱/۷۲۴۲	-
روش حاضر FG-O	۱/۰۴۱۹	۱/۳۱۷۰	۱/۵۸۷۵	۰/۴۰۴۲

که $M^{(1)}(x)$ مشتق مرتبه اول $M(x)$ است. ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول از مشتق گیری از تابع $g_i(x)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} g_j^{(1)}(x_i) & j \neq i \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)} & j = i; i, j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (30)$$

ضرایب وزنی مشتقات مرتبه بالاتر (مشتق مرتبه n) از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$C_{ij}^{(n)} = \begin{cases} n \left(C_{ij}^{(1)} C_{ii}^{(n-1)} - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right) & j \neq i \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(n)} & j = i \end{cases} \quad (31)$$

لازم به ذکر است که در نهایت، میدان جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= u_0(x)e^{i\omega t} \\ w_0(x,t) &= w_0(x)e^{i\omega t} \\ \phi(x,t) &= \phi(x)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (32)$$

با اعمال اصل همپلتون، معادله خطی ارتعاشات سازه به صورت معادله (۳۳) استخراج می‌شود:

$$\{[K] + [C]w + [M]w^2\} = \begin{bmatrix} u_{0m} \\ w_{0m} \\ \phi_{0m} \end{bmatrix} \quad (33)$$

که در معادله (۳۳)، K ماتریس سفتی، C ماتریس دمپینگ و M ماتریس جرمی است.

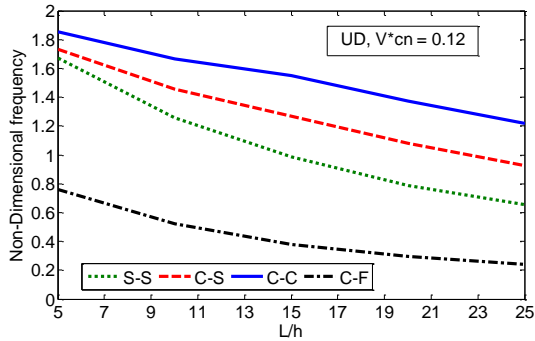
فلاتر برای سازه زمانی اتفاق می‌افتد که دو مود فرکانسی در یک فشار آیرودینامیکی مشخص به هم می‌رسند که به این فشار، فشار فلاتر گفته می‌شود. لازم به ذکر است که در این پژوهش، فشار بی‌بعد آیرودینامیک با رابطه $\lambda = \frac{\rho_{\infty} L^3}{E m h^3}$ محاسبه می‌شود. برای این منظور یک برنامه عددی در نرم افزار متلب آماده شده است که خروجی آن فرکانس‌های طبیعی و فشارهای بحرانی فلاتر تیر است.

۳ نتایج و بحث

۳.۱ صحه‌گذاری

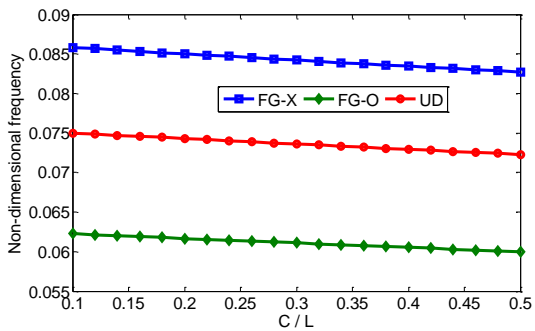
در این بخش، فلاتر تیر کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی همراه با جرم متصله بررسی و تحلیل می‌شود.

در شکل ۴، تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد تیر تقویت شده با نانولوله کربنی با شرایط تکیه‌گاهی مختلف، برحسب طول به ضخامت و بر اساس $V_{CN}^* = 0/12$ و توزیع یکنواخت ترسیم شده است. در همه شرایط مرزی، با افزایش نسبت L/h روند کاهش فرکانس مشاهده می‌شود.



شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد تیر تقویت شده با نانولوله کربنی برحسب طول به ضخامت

در گام سوم، اثر جرم متصله برحسب موقعیت جرم نسبت به مبدا و اثرات جرم متصله در شرایط تکیه‌گاهی مختلف و نحوه رخ دادن فلاتر برای شرایط مرزی یکسری‌دار، بررسی می‌شود. شکل ۵، تغییرات فرکانس بی بعد تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با الگوهای توزیع مختلف، برحسب موقعیت جرم نسبت به مبدا برای تکیه‌گاه یکسری‌دار نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با حرکت جرم از ابتدای تیر به مرکز آن، فرکانس بی بعد کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۵- تغییرات فرکانس بی بعد تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با الگوهای توزیع مختلف $V_{CN}^* = 0/12$ و $L/h = 50$ برحسب موقعیت جرم نسبت به مبدا برای تکیه‌گاه یکسری‌دار

در شکل ۶، تغییرات فرکانس ویژه برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی برای دو مود ارتعاشی اول تیر نشان داده شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت به صورت یکنواخت فرض شده و برای تیر تکیه‌گاه‌های گیردار و ساده در دو طرف در نظر گرفته شده است. جرم افزوده در مرکز تیر با $L/h = 50$ و $V_{CN}^* = 0/12$ فرض شده است. نمودار شکل ۶ نشان می‌دهد که مود

جدول ۴- مقایسه نتایج فشار بحرانی جریان آزاد تیر نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت و $M = 2, L/h = 50, V_{CN}^* = 0/12$

شرایط مرزی	S-S	C-S	C-C
روش حاضر	۶/۶۴۹۷	۸/۵۱۱۸	۱۰/۲۴۰۷
اسدی و وانگ [۱۰]	۶/۷۱۴۰	۸/۶۱۴۵	۱۰/۲۹۸۵

۲.۳ مطالعه تاثیر پارامترهای مختلف

در این بخش به بررسی تاثیرات توزیع نانولوله کربنی، شرایط مرزی، جرم متصله و درصد‌های حجمی مختلف پرداخته شده است. در گام نخست اثر توزیع نانولوله کربنی بر فرکانس بی بعد تیر تقویت شده بررسی می‌شود.

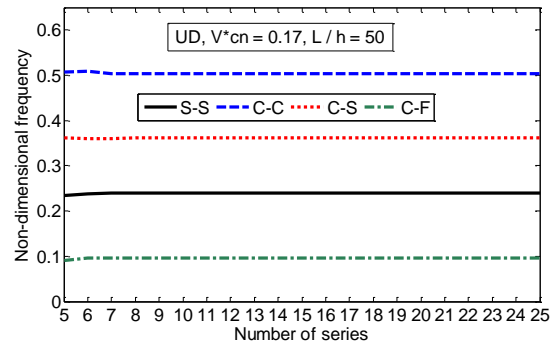
در جدول ۵، تغییرات فرکانس بی بعد تیر تقویت شده با نانولوله کربنی برای توزیعات مختلف CNT بر اساس شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. در تمامی تکیه‌گاه‌ها توزیع FG-X دارای بیشترین فرکانس و FG-O دارای کمترین فرکانس می‌باشد.

جدول ۵- فرکانس طبیعی بی بعد تیر تقویت شده با نانولوله کربنی برای توزیعات مختلف CNT و شرایط مرزی مختلف، $L/h = 20, V_{CN}^* = 0/12$

شرایط مرزی	S-S	C-S	C-C	C-F
UD	۰/۷۸۹۷	۱/۰۸۰۰	۱/۳۷۳۹	۰/۲۹۵۰
FG-X	۰/۹۲۵۴	۱/۲۱۴۷	۱/۴۹۹۹	۰/۳۵۳۱
FG-O	۰/۵۹۱۸	۰/۸۵۴۸	۱/۱۳۸۷	۰/۲۱۶۴

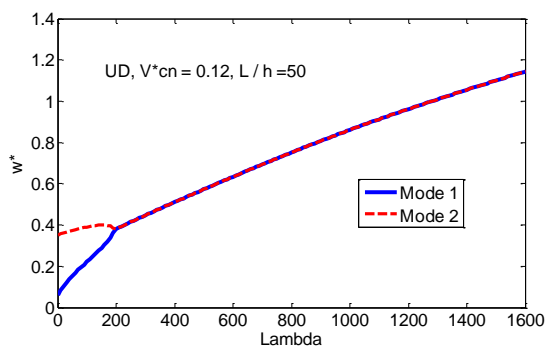
در گام دوم به بررسی اثر شرایط مرزی مختلف تیر تقویت شده پرداخته شده است.

در شکل ۳، اثر شرایط مرزی مختلف تیر تقویت شده به همراه بررسی همگرایی پاسخ با کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، نشان داده شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، بعد از ده جمله سری، فرکانس‌های بی بعد همگرا می‌شود. قابل ذکر است که نمودار با در نظر گرفتن اثر جرم متصله می‌باشد.

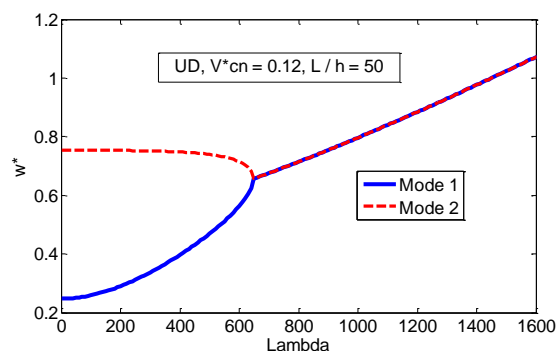


شکل ۳- همگرایی فرکانس بی بعد تیر تقویت شده با نانولوله کربنی دارای جرم متصله

اول و دوم ارتعاشی تیر در یک نقطه خاص به هم می‌رسند که این نقطه شروع فلاتر برای سازه خواهد بود.

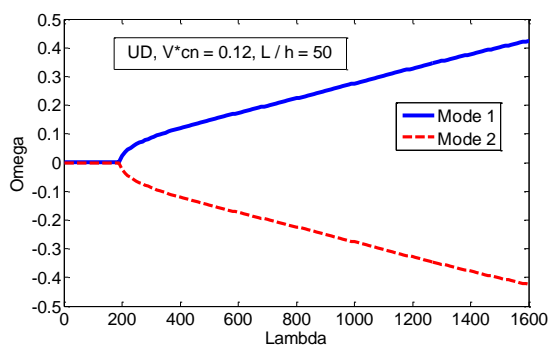


شکل ۸- تغییرات فرکانس ویژه تیر تقویت شده با نانولوله کربنی و جرم متصله با توزیع یکنواخت برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک برای حالت تکیه‌گاهی یکسرگردار- یکسر ساده



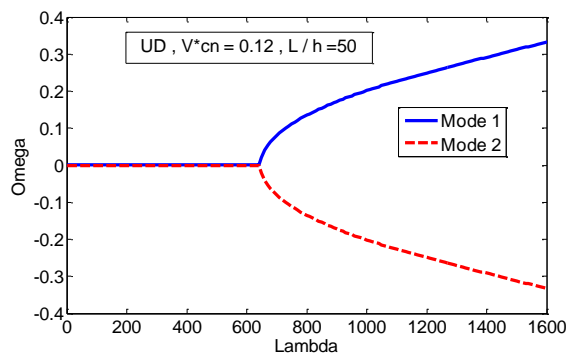
شکل ۶- تغییرات فرکانس ویژه تیر تقویت شده با نانولوله کربنی و جرم متصله با توزیع یکنواخت برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک برای حالت تکیه‌گاهی یکسرگردار- یکسر ساده

در شکل ۹، مرز فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت و جرم متصله با شرایط تکیه‌گاهی یکسرگردار ترسیم شده است. این شکل تغییرات نسبت میرایی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک را نشان می‌دهد و در فشاری که نسبت میرایی دو مود اول ارتعاشی از صفر دور شده اند، فلاتر رخ می‌دهد.



شکل ۹- مرز فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت و جرم متصله با شرایط تکیه‌گاهی یکسرگردار

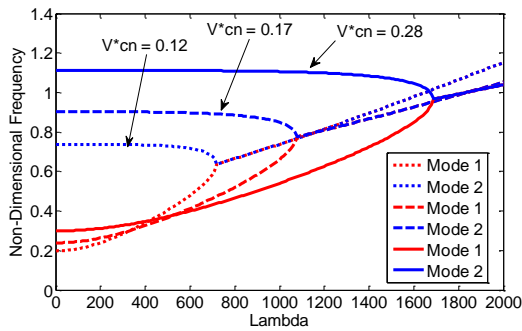
در شکل ۷، مرز فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت و جرم متصله با شرایط تکیه‌گاهی یکسرگردار- یکسر ساده ترسیم شده است. در این شکل، تغییرات نسبت میرایی برحسب افزایش فشار بی بعد آیرودینامیک نشان داده شده است. هنگامی که نسبت میرایی دو مود ارتعاشی اول از هم دور شوند فلاتر اتفاق می‌افتد.



شکل ۷- مرز فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت و جرم متصله برای حالت تکیه‌گاهی یکسرگردار- یکسر ساده

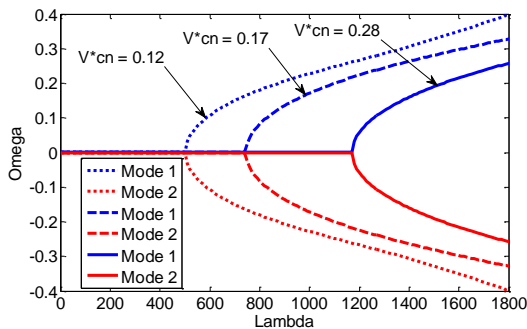
شکل ۱۰، تغییرات فرکانس ویژه برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی را برای دو مود ارتعاشی اول با شرایط تکیه‌گاهی یکسرگردار را نشان می‌دهد. این تیر با الگوی کاهشی-افزایشی توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است و جرم افزوده در مرکز تیر نمودار مشخص است، دو مود ارتعاشی اول و دوم در یک نقطه به هم می‌رسند که در این نقطه فلاتر برای سازه رخ می‌دهد. در شکل ۱۱ مرز فلاتر این تیر برای دو مود ارتعاشی اول ترسیم شده است. با توجه به تغییرات نسبت میرایی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک، زمانی که نسبت میرایی دو مود ارتعاشی از صفر دور شوند فلاتر رخ می‌دهد.

شکل ۸، تغییرات فرکانس ویژه برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی برای دو مود ارتعاشی اول تیر را نشان می‌دهد. این نمودار مربوط به توزیع نانولوله‌های کربنی به صورت یکنواخت در راستای ضخامت است و جرم افزوده در مرکز تیر با $L/h=50$ و $V_{CN}^*=0/12$ فرض شده است. همانطور که در نمودار مشخص است، دو مود ارتعاشی اول و دوم در یک نقطه به هم می‌رسند که در این نقطه فلاتر برای سازه رخ می‌دهد. در این حالت، در قیاس با تیر با شرایط تکیه‌گاهی دو سرگردار، دو سر ساده و یکسرگردار- یکسر ساده، فلاتر زودتر رخ داده است.

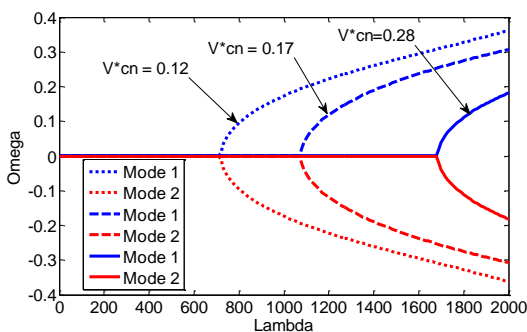


شکل ۱۳- تغییرات فرکانس ویژه تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع کاهشی-افزایشی و جرم متصله برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک

در شکل ۱۴ و ۱۵ تغییر نسبت میرایی برحسب افزایش فشار بی بعد آیرودینامیک برای دو حالت توزیع یکنواخت و کاهشی-افزایشی، نشان داده شده است. با مقایسه نتایج این دو شکل، ملاحظه می‌شود که مرز فلاتر با توزیع یکنواخت نسبت به توزیع کاهشی-افزایشی کاهش می‌یابد در نتیجه فلاتر زودتر برای سازه رخ می‌دهد.



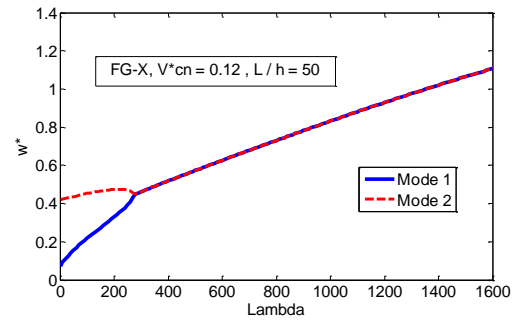
شکل ۱۴- مرز فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت و جرم متصله برای V_{CN}^* مختلف



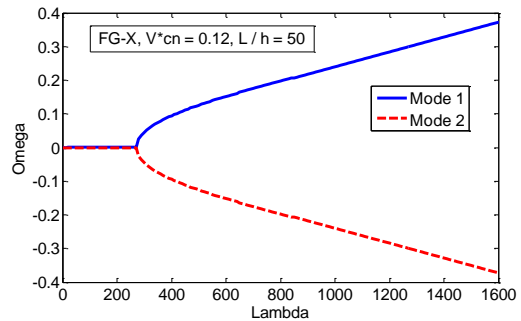
شکل ۱۵- مرز فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع کاهشی-افزایشی و جرم متصله برای V_{CN}^* مختلف

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارای جرم متصله، با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی، بررسی شده است. همچنین جهت تخمین فشار آیرودینامیکی از تئوری

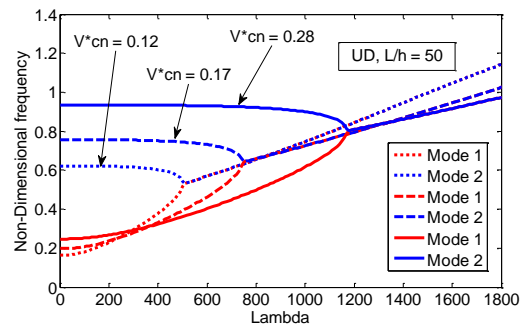


شکل ۱۰- تغییرات فرکانس ویژه تیر تقویت شده با نانولوله کربنی و جرم متصله با توزیع کاهشی-افزایشی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک



شکل ۱۱- مرز فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع کاهشی-افزایشی و جرم متصله با شرایط تکیه‌گاهی یکسر گیردار

در گام آخر، اثر درصد‌های حجمی V_{CN}^* بر پدیده فلاتر با توزیع یکنواخت و کاهشی-افزایشی مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۱۲، تغییرات فرکانس ویژه تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت را برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی با جرم متصله برای V_{CN}^* مختلف نشان می‌دهد. این شکل مشخص می‌کند که با افزایش V_{CN}^* فلاتر در فشار بیشتری رخ می‌دهد. در نمودار شکل ۱۳، تغییرات فرکانس ویژه تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع کاهشی-افزایشی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی همراه با جرم متصله برای V_{CN}^* مختلف ترسیم شده است. در این شکل هم می‌توان ملاحظه کرد که در مقایسه با توزیع یکنواخت، فلاتر در فشار بیشتری برای سازه رخ می‌دهد.



شکل ۱۲- تغییرات فرکانس ویژه تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت و جرم متصله برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی برای V_{CN}^* مختلف

[6] M. H. Yas, and M. Heshmati, "Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, pp. 1371-1394, 2012.

[7] K. M. Liew, Z. X. Lei, and L. W. Zhang, "Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: a review," *Composite Structures*, vol. 120, pp. 90-97, 2015.

[8] S. K. Soni, B. Thomas, and V. R. Kar, "A Comprehensive Review on CNTs and CNT-Reinforced Composites: Syntheses, Characteristics and Applications," *Materials Today Communications*, vol. 25, pp. 101546, 2020.

[9] S. K. Soni, B. Thomas, A. Swain, and T. Roy, "Functionally graded carbon nanotubes reinforced composite structures: An extensive review," *Composite Structures*, vol. 299, pp. 116075, 2022.

[10] H. Asadi, and Q. Wang, "An investigation on the aeroelastic flutter characteristics of FGCNTRC beams in the supersonic flow," *Composites Part B: Engineering*, vol. 116, pp. 486-499, 2017.

[11] M. Heidari, and H. Arvin, "Nonlinear free vibration analysis of functionally graded rotating composite Timoshenko beams reinforced by carbon nanotubes," *Journal of Vibration and Control*, vol. 25, pp. 2063-2078, 2019.

[12] M. Mohammadimehr, A. A. Monajemi, and H. Afshari, "Free and forced vibration analysis of viscoelastic damped FG-CNT reinforced micro composite beams," *Microsystem Technologies*, vol. 26, pp. 3085-3099, 2020.

[13] Z. G. Song, L. W. Zhang, and K. M. Liew, "Aeroelastic analysis of CNT reinforced functionally graded composite panels in supersonic airflow using a higher-order shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 141, pp. 79-90, 2016.

[14] L. W. Zhang, Z. G. Song, and K. M. Liew, "Computation of aerothermoelastic properties and active flutter control of CNT reinforced functionally graded composite panels in supersonic airflow," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 300, pp. 427-441, 2016.

[15] R. B. Bharati, M. Filippi, P. K. Mahato, and E. Carrera, "Flutter analysis of delaminated composite box-beam using higher-order kinematics," *Composite Structures*, vol. 301, pp. 116145, 2022.

[16] S. B. Mousavi, and A. A. Yazdi, "Flutter of delaminated three-phase nano-composite beam-plates," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 27, pp. 561-568, 2020.

[17] H. Esmaili, and H. Arvin, "Nonlinear forced vibration of clamped-free beam reinforced by carbon nanotubes with an attached mass," *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 21, pp. 158-180, 2019.

[18] O. Kompaz, and S. Telli, "Free vibration of a rectangular plate carrying distributed mass," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251, pp. 39-57, 2002.

[19] P. Mardanpour, and P. Richards, "Effect of multiple engine placement on aeroelastic trim and stability of flying

مرتبه اول پیستون استفاده گردیده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات این سیستم دینامیکی بر اساس اصل همیلتون استخراج شده است و سپس با حل معادلات به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در نهایت فرکانس طبیعی سیستم دینامیکی و فشار آیرودینامیکی وقوع پدیده فلاتر بدست آمده است. شرایط مرزی مختلف و اثرات توزیع نانولوله کربنی بر رفتار پدیده فلاتر و اثرات ناپایداری سازه بررسی شده است. نتایج زیر حاصل شده است:

۱- با حرکت جرم متصل به تیر یکسرگیردار از ابتدای تیر به مرکز تیر، فرکانس طبیعی ارتعاشات تیر کاهش پیدا می کند.

۲- فرکانس بی بعد با توزیع یکنواخت در کلیه شرایط مرزی با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس کاهش پیدا می کند.

۳- تغییرات فرکانس ویژه تیر تقویت شده با نانولوله کربنی و جرم متصله با شرایط تکیه گاهی یکسرگیردار و الگوی توزیع یکنواخت در نانو لوله های کربنی، در مقایسه با الگوی کاهشی-افزایشی، بیشترین تغییرات را دارد.

۴- پدیده فلاتر برای تیر یکسرگیردار با توزیع کاهشی-افزایشی نسبت به توزیع یکنواخت مطلوب تر می باشد.

۵- برای تیر تقویت شده با نانولوله کربنی و جرم متصله با توزیع یکنواخت و شرایط تکیه گاهی یکسر گیردار در مقایسه با تیر با شرایط تکیه گاهی دو سر ساده و یکسر گیردار-یکسر ساده، فلاتر زودتر رخ داده است.

۶- با ترسیم تغییرات فرکانس ویژه تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی با توزیع یکنواخت برحسب فشار بی بعد آیرودینامیکی با جرم متصله برای V_{CN}^* مختلف، مشخص شد که با افزایش V_{CN}^* فلاتر دیرتر رخ می دهد.

۵ منابع

[1] S. Iijima, "Helical microtubules of graphitic carbon," *Nature*, vol. 354, pp. 56-58, 1991.

[2] V. Anumandla, and R. F. Gibson, "A comprehensive closed form micromechanics model for estimating the elastic modulus of nanotube-reinforced composites," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 37, pp. 2178-2185, 2006.

[3] M. Griebel, and J. Hamaekers, "Molecular dynamics simulations of the elastic moduli of polymer-carbon nanotube composites," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 193, pp. 1773-1788, 2004.

[4] Y. Han, and J. Elliott, "Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites," *Computational Materials Science*, vol. 39, pp. 315-323, 2007.

[5] G. D. Seidel, and D. C. Lagoudas, "Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites," *Mechanics of Materials*, vol. 38, pp. 884-907, 2006.

- [24] L. W. Zhang, Z. X. Lei, and K. M. Liew, "Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite triangular plates using the FSDT and elementfree IMLS-Ritz method," *Composite Structures*, vol. 120, pp. 189-199, 2015.
- [25] A. Sankar, S. Natarajan, T. Ben Zineb, and M. Ganapathi, "Investigation of supersonic flutter of thick doubly curved sandwich panels with CNT reinforced facesheets using higher-order structural theory," *Composite Structures*, vol. 127, pp. 340-355, 2015.
- [26] Z. G. Song, F. M. Li, E. Carrera, and P. Hagedorn, "A new method of smart and optimal flutter control for composite laminated panels in supersonic airflow under thermal effects," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 414, pp. 218-232, 2018.
- [27] M. H. Yas, and N. Samadi, "Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic pressure Vessels and foundation," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 98, pp. 119-128, 2012.
- wing aircraft," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 44, pp. 67-86, 2014.
- [20] A. Jamshid, and N. Vahdat Azad, "Flutter Analysis of CNT-Reinforced Functionally Graded Composite Wing with Attached Mass," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 19, pp. 1855-1864, 2019.
- [21] T. Vo-Duy, and V. Ho-Huu, "Free vibration analysis of laminated FG-CNT reinforced composite beams using finite element method," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 13, pp. 324-336, 2019.
- [22] M. R. Nami, and M. Janghorban, "Free vibration of thick functionally graded carbon nanotube-reinforced rectangular composite plates based on threedimensional elasticity theory via differential quadrature method," *Advanced Composite Materials*, vol. 24, pp. 439-450, 2015.
- [23] Y. Kiani, "Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew plates," *Aerospace Science and Technology*, vol. 58, pp. 178-188, 2016.