




# تحلیل خیز بزرگ نانوتیرهای با سطح مقطع دایره تحت بار گسترده با در نظر گرفتن اثرات سطح

احسان رئیسی استبرق 

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جیرفت، جیرفت، ایران

ایمیل: e.raeisi@ujirof.ac.ir

در مطالعه حاضر خیز بزرگ نانوتیرها همراه با اثرات سطح بررسی شده است. اثرات سطح در این مطالعه با استفاده از معادله یانگ لاپلاس عمومی اعمال شده است. همچنین روش اجزاء محدود برای تحقیق در مورد رفتار مکانیکی نانوتیرهای با خیز بزرگ مورد استفاده قرار گرفته که امکان حل مسئله با کمترین فرضیات و با شرایط مرزی و هندسه دلخواه را فراهم می کند. به کمک مدل ارائه شده می توان نانوتیرها با خیز کوچک تا بزرگ با شرایط بارگذاری و تکیه گاهی مختلف را تحلیل کرد. در این پژوهش تاثیر پارامترهای مختلف همچون نسبت لاغری، مدول الاستیک سطح و تنش مانده سطح بر روی خیز بزرگ نانوتیر یکسرگیردار با سطح مقطع دایره ای تحت بار گسترده سینوسی، بررسی شده است. نتایج بدست آمده اهمیت در نظر گرفتن اثرات سطح در بررسی خیز بزرگ نانوتیرها را نشان می دهد.

واژه های کلیدی: تخصیص بهینه، قابلیت اطمینان، زیرسامانه پشتیبان حیات، فضاییای سرنشین دار

## Analysis of Large Deflection of Nanobeams with Circular Cross Section under Distributed Load Taking into Surface Effects

E. Raeisi Estabragh 

1. Assistant Professor Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Jiroft, Jiroft, Iran

Email: e.raeisi@ujirof.ac.ir

*In the present study, the large deflection of nanobeams with surface effects has been investigated. The surface effects are modeled by using the generalized Young–Laplace equation. The finite element method has been used to investigate the mechanical behavior of nanobeams. This method provides the possibility of solving the problem with the least assumptions and with the arbitrary boundary conditions and geometry. With the use of the proposed model, nanobeams small to large deflection with different loading and support conditions can be analyzed. In this study, the large deflection of circular cross-sectional nanobeams under sinusoidal distributed load with surface effects has been investigated. The effect of various parameters such as aspect ratio, surface elastic modulus and residual surface stress on the large deflection of nanobeams has been investigated. The result obtained show the importance of considering the surface effects in the study of large deflection of nanobeams.*

**Keywords:** Finite element method, Surface effects, Large deflection, Timoshenko beam theory, Nanobeam



COPYRIGHTS

© 2023 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

How to Cite this in Article:

E. Raeisi Estabragh, " Analysis of Large Deflection of Nanobeams with Circular Cross Section under Distributed Load Taking into Surface Effects", *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, vol. 7, no. 3, pp. 25-35, 2023 (in Persian).

## ۱ مقدمه

با پیشرفت سریع نانوتکنولوژی، نانو ساختارهایی مانند نانوتیرها، نانوصفحات و نانولوله‌ها از اهمیت زیادی برخوردار شده‌اند. نانوتیرها در نانوحسگرها، ترانزیستورها، محرک‌ها و مبدل‌های نیرو در سیستم‌های نانوالکترومکانیکی، میکروسکوپ‌های نیروی اتمی کاربرد فراوانی دارند [۱، ۲]. بنابراین محققان زیادی در زمینه کشف کارایی‌های مکانیکی ناشناخته این نانسازه‌ها فعالیت کرده‌اند. کارهای تجربی متعددی در زمینه تحقیق بر روی رفتار مکانیکی این نانسازه‌ها انجام شده‌است [۳، ۴]. نتایج تجربی نشان می‌دهد که تئوری‌های محیط پیوسته کلاسیک قادر به پیش‌بینی دقیق رفتار سازه‌های در مقیاس نانو نیستند. از این رو برای مدلسازی رفتار الاستیک این نانو سازه‌ها از تئوری‌های محیط پیوسته اصلاح‌شده استفاده می‌شود. به دلیل نسبت بالای سطح به حجم در نانو ساختارها، تئوری محیط پیوسته مرسوم با در نظر گرفتن اثرات سطح، به عنوان مدلی اصلاح‌شده، برای شبیه‌سازی نانو ساختارها مناسب می‌باشد. محققان زیادی به بررسی خیز نانوتیرها با در نظر گرفتن اثرات سطح پرداخته‌اند که اغلب آن‌ها خیز کوچک نانوتیرها را بررسی کرده‌اند.

گو و ژائو یک مدل نظری برای تحلیل خیز نانوتیرها با در نظر گرفتن تعادل لایه سطحی و تنش سطح ارائه داده‌اند و با استفاده از آن خواص خمش الاستیک وابسته به اندازه را پیش‌بینی کرده‌اند [۵]. هی و لیلی در تحلیل رفتار خمش ایستای نانوسیم‌ها اثرات سطح را در قالب تنش سطح و الاستیسیته سطح، با ترکیب تئوری تیر اویلر-برنولی با معادله یانگ-لاپلاس اعمال کرده‌اند [۶]. در این تحقیق برای بررسی وابستگی مدول یانگ کلی به اثرات سطح، پاسخ صریحی برای سه حالت تکیه‌گاهی یکسردرگیر، ساده و دوسردرگیر ارائه شده‌است که تطابق خوبی با نتایج تجربی خیز کوچک نانوسیم‌های سرب و نقره داشته‌است. جیانگ و یان با استفاده از یک مدل تیر تیموشنکوی جامع، اثرات سطح بر رفتار الاستیک خمش ایستای نانوسیم‌ها را بررسی کرده‌اند [۷]. با در نظر گرفتن همزمان تنش مانده (اولیه) سطح، الاستیسیته سطح و تغییرشکل برشی، حل صریحی را برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف بر حسب سفتی و مدول یانگ مؤثر ارائه داده‌اند که تطابق خوبی با نتایج تجربی خیز کوچک نانوسیم‌های سرب و نقره داشته‌است. کثیراجان و همکاران به بررسی رفتار خمشی و ارتعاش آزاد تیر همراه با اثرات سطح پرداختند [۸].

ژائو و لیو مسئله تغییر شکل خمشی نانوتیرها را همراه با اثرات سطح با استفاده از معادله یانگ لاپلاس حل کردند [۹]. یائو و چن [۱۰] و هی و یان [۱۱] خمش نانو تیرها و زو و لی کمانش نانو تیرها [۱۲] را همراه با اثرات سطح بررسی کردند.

اغلب محققان خیزهای کوچک نانوتیرها را با در نظر گرفتن اثرات سطح بررسی کرده‌اند [۵-۷]. این در حالی است که به نظر می‌رسد در برخی کاربردها، نانوتیرها خیزهای بزرگ را تحمل می‌کنند [۱۳-۱۶]. در تیرهایی که در سیستم‌های میکروالکترومکانیکال و نانوالکترومکانیکال استفاده می‌شوند بعضی اوقات با تغییر شکل با دامنه بزرگ مواجه هستیم که عامل غیرخطی شدن هندسی مسئله است. این موضوع باعث می‌شود که نتایج ارتعاشی و استاتیکی به صورت قابل توجه تغییر کند [۱۷، ۱۸].

بنابر بررسی‌های انجام شده، اولین کار در تحلیل استاتیکی خیز بزرگ نانوتیرها با اثرات سطح توسط زنگ و ژنگ انجام شده- است [۱۹]. آن‌ها تنها با در نظر گرفتن خواص مادی متفاوت برای سطح و حجم، یک تئوری خیز بزرگ برای نانوتیرها ارائه داده‌اند. در این روش از کنش و واکنش بین سطح و حجم و تنش اولیه در سطح و حجم صرف نظر شده‌است. آن‌ها روش حل تحلیلی برای دو تیر یکسردرگیر و دوسر درگیر را ارائه کرده‌اند. بعد از آن‌ها، هی و لیلی با ترکیب کردن تنش سطح با فرمول‌بندی اجزاء محدودی مختصات مطلق گرهی، مدلی برای تحلیل خمش الاستیک نانوسیم‌ها در تغییرشکل بزرگ ارائه داده‌اند [۲۰]. فرمول‌بندی مختصات مطلق گرهی روشی عددی خاصی برای مدلسازی خمش سازه‌ها در خیز بزرگ می‌باشد. اثرات سطح در این روش با معادله یانگ-لاپلاس عمومی در نظر گرفته شده‌اند. تغییرشکل تیر بر پایه تئوری تیر اویلر-برنولی در نظر گرفته شده‌است. لیو و همکاران روش حل عددی جهت بررسی تغییرمکان بزرگ خمش ایستای یک نانوسیم با اثرات سطح با استفاده از یک برنامه کامپیوتری بر اساس روش پرتاب ارائه داده‌اند [۲۱]. اثرات سطح در این روش با معادله یانگ-لاپلاس عمومی اعمال شده‌است. ساپساتارن و راجاپاکسه نیز مدلی برای تحلیل استاتیکی خیز بزرگ نانوتیرها ارائه داده‌اند [۲۲]. در مدل آن‌ها اثرات انرژی سطح با تئوری محیط پیوسته گورتین-مرداک در نظر گرفته شده‌است. تغییرشکل تیر بر پایه تئوری تیر اویلر-برنولی در نظر گرفته شده‌است. برای حل معادلات از الگوریتم عددی تطبیق عمومی استفاده شده‌است.

سو و همکاران خمش استاتیکی نانو تیر مدرج تابعی را همراه با اثرات سطح تحت نیروی متمرکز خارجی بررسی کردند. آن‌ها نانو تیر را به صورت یک تیر مرکب از سطح و حجم در نظر گرفتند و برای اعمال اثرات سطح از معادله یانگ لاپلاس استفاده کردند [۲۳]. لین و همکاران تحلیل کمانش و رفتار ارتعاشی نانوتیر همراه با اثرات سطح را انجام دادند. آن‌ها از روش ریتز برای بدست آوردن معادلات کمانش و ارتعاشی نانوتیر استفاده کردند و تاثیرات در نظر گرفتن اثرات سطح را بررسی کردند [۲۴]. تقی‌پور و برادران، مدلی برای تحلیل خیز بزرگ نانوسیم‌ها بر اساس یک تئوری غیرمحلّی ارائه دادند و معادلات حاکم بر مسئله را با روش فرمول‌بندی وردشی

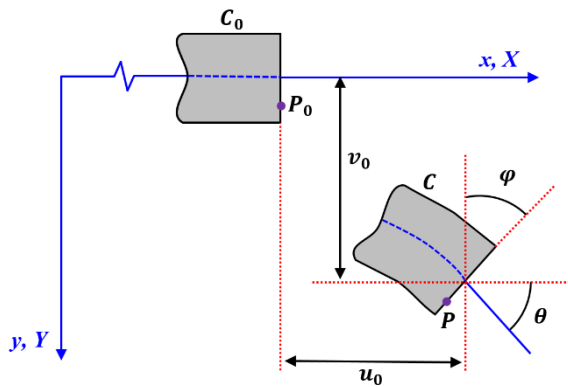
## ۲ مدل سازی خیز بزرگ تیر تیموشنکو همراه با اثرات سطح

کلی ترین میدان جابجایی بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و با توجه به شکل (۱)، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u(X, Y, Z) &= u_0(X) - Y \sin(\varphi(X)) \\ v(X, Y, Z) &= v_0(X) - Y[1 - \cos(\varphi(X))] \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(X, Y, Z) = 0$$

که  $u_0$  و  $v_0$  به ترتیب جابجایی های مرکز سطح مقطع در جهت های  $X$  و  $Y$ ، و  $\varphi$  و  $\theta$  به ترتیب چرخش سطح مقطع و شیب محور تیر هستند. بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، کرنش برشی اصلی یا کامل در یک سطح مقطع  $\gamma = \theta - \varphi$  می باشد.



شکل ۱- تغییر شکل تیر بر اساس تئوری تیر تیموشنکو

مؤلفه های غیر صفر کرنش بر اساس رابطه کرنش های گرین لاگرانژ به شکل زیر هستند [۲۵].

$$\begin{aligned} E_{XX} &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right] \\ &= (u'_0 - Y\kappa \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(u'_0 - Y\kappa \cos \varphi)^2 \\ &\quad + (v'_0 - Y\kappa \sin \varphi)^2] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} E_{XY} = E_{YX} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [-(1 + u'_0) \sin \varphi \\ &\quad + v'_0 \cos \varphi] \end{aligned} \quad (3)$$

که پریم در روابط (۲) و (۳) مشتق نسبت به  $X$  را نشان می دهد و  $\kappa$  انحنايي هم مرتبه انحناي  $\kappa_\theta$  و به صورت مشتق  $\varphi$

استخراج کردند [۱۴]. رئیسی و برداران، ارتعاش آزاد با دامنه بزرگ نانوتیرها بر پایه تئوری تنش کوپل اصلاح شده را مورد بررسی قرار دادند [۱۵]. آن ها برای این منظور تاثیر پارامتر مقیاس طول بی بعد، ضریب لاغری، دامنه ارتعاشی و شرایط تکیه گاهی مختلف بر روی نسبت فرکانس غیرخطی را بررسی کردند. همچنین آن ها خمش نانوتیرها همراه با جابجایی های بزرگ بر پایه تئوری تنش کوپل اصلاح شده را با استفاده از روش اجزاء محدود مورد تحلیل و بررسی قرار دادند [۱۶].

همان طور که در بالا اشاره شد تحقیقات کمی به بررسی رفتار مکانیکی نانوتیرها همراه با اثرات سطح با فرض خیز بزرگ و با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو پرداخته اند، از این رو در مطالعه حاضر برای اولین بار خیز بزرگ نانوتیرها به همراه اثرات سطح به روش اجزاء محدود مورد مطالعه قرار گرفته است. در تحقیق پیش رو در تحلیل خمش نانوتیر از تئوری تیر تیموشنکو و با حداقل فرضیات سینماتیکی برای مدل کردن نانوتیر استفاده شده که تغییر شکل برشی را مد نظر قرار می دهد. همچنین جابجایی محوری نانوتیر نیز در نظر گرفته شده است. به دلیل پیچیدگی سازه های کوچک مقیاس، روش اجزاء محدود به عنوان یک روش عددی قدرتمند برای تحقیق در مورد رفتار مکانیکی چنین سازه هایی مورد استفاده قرار گرفته است. این روش امکان حل مسئله با کمترین فرضیات و با شرایط مرزی و هندسه دلخواه را فراهم می کند. با این مدل تحلیل استاتیکی نانو تیر با جابجایی های کاملاً بزرگ امکان پذیر می گردد. بدین منظور، در ابتدا مدل خیز بزرگ نانوتیرها همراه با اثرات

سطح معرفی شده است. این مدل بر پایه تئوری تیر تیموشنکو و فرمولاسیون اجزاء محدود کاملاً لاگرانژی بنا شده است. در ادامه نتایج عددی مختلف آورده شده و در مورد آن ها بحث شده است. صحت و دقت نتایج عددی بدست آمده با نتایج حل صریح نانوتیر یکسرگردار جیانگ و یان [۷] مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت خیز بزرگ نانوتیرها همراه با اثرات سطح مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا تاثیر در نظر گرفتن اثرات سطح نسبت به حالت تئوری کلاسیک تیر تیموشنکو بر روی خیز بزرگ نانوتیرها بررسی شده است. در ادامه تاثیر مقادیر متفاوت مدول الاستیک سطح بر روی خیز بزرگ نانوتیرها، بررسی شده است. در نهایت تاثیر مقادیر مختلف تنش مانده سطح بر روی خیز بزرگ و شیب نانوتیرها بررسی شده است. مدل اجزاء محدود ارائه شده برای تحلیل خیز بزرگ نانوتیرهای با سطح مقطع های یکنواخت و غیر یکنواخت تحت بارگذاری ها و شرایط مرزی دلخواه قابل استفاده می باشد در نتیجه خیز بزرگ نانوتیر یکسرگردار با سطح مقطع دایره ای تحت بار گسترده سینوسی به عنوان نمونه بررسی شده است.

درجه آزادی است. در نتیجه، یک المان دوگره‌ای دارای ده درجه آزادی می‌باشد. این ده درجه آزادی المان در بردار جابجایی گرهی به شکل زیر جمع شده‌اند:

$$u = [u_1 \ v_1 \ v'_1 \ \varphi_1 \ \varphi'_1 \ u_2 \ v_2 \ v'_2 \ \varphi_2 \ \varphi'_2]^T \quad (15)$$

که  $u_1, v_1, v'_1, \varphi_1, \varphi'_1, u_2, v_2, v'_2, \varphi_2, \varphi'_2$  درجات آزادی در گره‌های اول و دوم المان هستند. اولین بردش انرژی داخلی نسبت به جابجایی‌های گرهی به صورت زیر نوشته شده‌است:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{L_0} (N \delta e + V \delta \gamma + M \delta \kappa) dX \\ &= \int_{L_0} z^T \delta h dX \\ &= \int_{L_0} z^T B dX \delta u \\ &= p^T \delta u \end{aligned} \quad (16)$$

که

$$\delta h = B \delta u \quad (17)$$

با نوشتن  $u_0(X)$  بر حسب توابع شکل لاگرانژی و  $v_0(X)$  و مشتق بر حسب توابع شکل هرمیت و مؤلفه‌های بردار جابجایی  $u$  و مشتق گیری جزئی از  $e, \gamma, \kappa$  نسبت به جابجایی‌های گرهی، ماتریس  $B$  به صورت زیر بدست می‌آید.

$$B = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 2\hat{\varphi}'_1 \sin \varphi & 2\hat{\varphi}'_1 \cos \varphi & 0 \\ 2\hat{\varphi}'_2 \sin \varphi & 2\hat{\varphi}'_2 \cos \varphi & 0 \\ L_0 \hat{\varphi}_1 \gamma & -L_0 \hat{\varphi}_1 (1+e) & 2\hat{\varphi}'_1 \\ L_0 \hat{\varphi}_2 \gamma & -L_0 \hat{\varphi}_2 (1+e) & 2\hat{\varphi}'_2 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 2\hat{\varphi}'_3 \sin \varphi & 2\hat{\varphi}'_3 \cos \varphi & 0 \\ 2\hat{\varphi}'_4 \sin \varphi & 2\hat{\varphi}'_4 \cos \varphi & 0 \\ L_0 \hat{\varphi}_3 \gamma & -L_0 \hat{\varphi}_3 (1+e) & 2\hat{\varphi}'_3 \\ L_0 \hat{\varphi}_4 \gamma & -L_0 \hat{\varphi}_4 (1+e) & 2\hat{\varphi}'_4 \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

$\hat{\varphi}_i$ ها در رابطه بالا توابع شکل هرمیت هستند که در رابطه (۱۹) آورده شده‌اند.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 &= 1 - \frac{3}{4}(1+\xi)^2 + \frac{1}{4}(1+\xi)^3 \\ \hat{\varphi}_2 &= -\frac{L_0}{2}(1+\xi) \left[ 1 - \frac{1}{2}(1+\xi) \right]^2 \\ \hat{\varphi}_3 &= \frac{3}{4}(1+\xi)^2 - \frac{1}{4}(1+\xi)^3 \\ \hat{\varphi}_4 &= -\frac{L_0}{2}(1+\xi) \left[ \frac{1}{4}(1+\xi)^2 - \frac{1}{2}(1+\xi) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

(زاویه چرخش سطح مقطع) نسبت به  $X$  به صورت رابطه (۴) تعریف شده‌است.

$$\kappa = \varphi' \quad (4)$$

بنابر تکنیک خطی‌سازی سازگار [۲۶]، نشان داده می‌شود که با فرض کرنش‌های کوچک برای المان خطی در روش اجزاء محدود، کرنش محوری با عبارت رابطه (۵) قابل جایگزین کردن است.

$$E_{XX} = (1 + u'_0) \cos \varphi + v'_0 \sin \varphi - Y \kappa - 1 \quad (5)$$

دو کرنش غیر صفر  $E_{XX}$  و  $E_{XY}$  را براساس کرنش محوری  $e$ ، انحنای  $\kappa$  و برش اصلی  $\gamma$  به شکل روابط (۶) و (۷) بیان می‌شوند.

$$E_{XX} = e - Y \kappa \quad (6)$$

$$2E_{XY} = \gamma \quad (7)$$

که در روابط (۶) و (۷) داریم:

$$e = (1 + u'_0) \cos \varphi + v'_0 \sin \varphi - 1 \quad (8)$$

$$\gamma = -(1 + u'_0) \sin \varphi + v'_0 \cos \varphi \quad (9)$$

$N, V, M$  و نیروهای داخلی تیر، به ترتیب، نیروی محوری، نیروی برش عرضی و گشتاور می‌باشند که به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$N = \int_{A_0} S_{XX} dA \quad (10)$$

$$V = \int_{A_0} S_{XY} dA \quad (11)$$

$$M = - \int_{A_0} Y S_{XX} dA \quad (12)$$

در روابط بالا  $Y$  فاصله از تار خنثای تیر است.  $S_{XX}$  و  $S_{XY}$  تنش‌های دوم پیولا-کیرشهف عمودی و برشی تیر تیموشنکو هستند. رابطه بردار برآیند تنش  $Z$  براساس بردار کرنش عمومی  $h$  و ماتریس سفتی  $C$  به شکل زیر بیان شده‌است:

$$z = C h \quad (13)$$

که داریم:

$$\begin{bmatrix} N \\ V \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA_0 & 0 & 0 \\ 0 & GK_s A_0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (14)$$

در معادله فوق به ترتیب،  $E$  و  $G$  مدول‌های الاستیسیته و برشی،  $K_s$  ضریب تصحیح برشی و  $A_0$  و  $I_0$  مساحت و گشتاور لختی سطح مقطع حول تار خنثای تیر هستند.

در مطالعه حاضر از فرمول‌بندی اجزاء محدودی کاملاً لاگرانژی استفاده شده‌است. در این نوع فرمول‌بندی، یک المان دو گرهی برای تیر مستقیم در نظر گرفته شده‌است. هر گره دارای پنج

با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۶) و با گرفتن اولین وردش از بردار  $Z$  و ماتریس  $B$ ، اعضای ماتریس  $K$  محاسبه شده است که حاصل جمع سفتی مادی  $K_M$  و سفتی هندسی  $K_G$  می‌باشد. ماتریس سفتی مادی  $K_M$  عبارتست از:

$$K_M = \int_{L_0} B^T C B dX = K_M^a + K_M^b + K_M^s \quad (22)$$

که  $K_M^a$  سفتی مادی محوری می‌باشد که در رابطه (۲۳) آورده شده است.

$$K_M^a = \frac{EA_0}{2L_0} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{22} & A_{21} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$A_{ij}$  در رابطه (۲۳) به صورت رابطه (۲۴) است.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} (-1)^{j+1} 2c_m^2 & (-1)^{j+1} 3c_m s_m & (-1)^i \frac{1}{2} L_0 c_m s_m & (-1)^i L_0 \gamma_m c_m & (-1)^{j+1} \frac{1}{4} L_0^2 \gamma_m c_m \\ (-1)^{j+1} 3c_m s_m & (-1)^{j+1} \frac{9}{2} s_m^2 & (-1)^i \frac{3}{4} L_0 s_m^2 & (-1)^i \frac{3}{2} L_0 \gamma_m s_m & (-1)^{j+1} \frac{3}{8} L_0^2 \gamma_m s_m \\ (-1)^{i+j+1} \frac{1}{2} L_0 c_m s_m & (-1)^{i+j+1} \frac{3}{4} L_0 s_m^2 & \frac{1}{8} L_0^2 s_m^2 & \frac{1}{4} L_0^2 \gamma_m s_m & (-1)^{i+j+1} \frac{1}{16} L_0^3 \gamma_m s_m \\ (-1)^{i+j+1} L_0 \gamma_m c_m & (-1)^{i+j+1} \frac{3}{2} L_0 \gamma_m s_m & \frac{1}{4} L_0^2 \gamma_m s_m & \frac{1}{2} L_0^2 \gamma_m^2 & (-1)^{i+j+1} \frac{1}{8} L_0^3 \gamma_m^2 \\ (-1)^{j+1} \frac{1}{4} L_0^2 \gamma_m c_m & (-1)^{j+1} \frac{3}{8} L_0^2 \gamma_m s_m & (-1)^i \frac{1}{16} L_0^3 \gamma_m s_m & (-1)^i \frac{1}{8} L_0^3 \gamma_m^2 & (-1)^{j+1} \frac{1}{32} L_0^4 \gamma_m^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \frac{9}{4} & (-1)^i \frac{3}{8} L_0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{i+j+1} \frac{3}{8} L_0 & \frac{1}{16} L_0^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$K_M^s$  سفتی مادی برشی است که در ادامه آورده شده است.

$$K_M^s = \frac{GA_0}{2L_0} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{22} & S_{21} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$S_{ij}$  در رابطه بالا، در رابطه (۲۸) تعریف شده است.

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} (-1)^{j+1} 2s_m^2 & (-1)^j 3c_m s_m & (-1)^{i+1} \frac{1}{2} L_0 c_m s_m & (-1)^i L_0 a_1 s_m & (-1)^{j+1} \frac{1}{4} L_0^2 a_1 s_m \\ (-1)^j 3c_m s_m & (-1)^{j+1} \frac{9}{2} c_m^2 & (-1)^i \frac{3}{4} L_0 c_m^2 & (-1)^{i+1} \frac{3}{2} L_0 a_1 c_m & (-1)^j \frac{3}{8} L_0^2 a_1 c_m \\ (-1)^{i+j} \frac{1}{2} L_0 c_m s_m & (-1)^{i+j+1} \frac{3}{4} L_0 c_m^2 & \frac{1}{8} L_0^2 c_m^2 & -\frac{1}{4} L_0^2 a_1 c_m & (-1)^{i+j} \frac{1}{16} L_0^3 a_1 c_m \\ (-1)^{i+j+1} L_0 a_1 s_m & (-1)^{i+j} \frac{3}{2} L_0 a_1 c_m & -\frac{1}{4} L_0^2 a_1 c_m & \frac{1}{2} L_0^2 a_1^2 & (-1)^{i+j+1} \frac{1}{8} L_0^3 a_1^2 \\ (-1)^{j+1} \frac{1}{4} L_0^2 a_1 s_m & (-1)^j \frac{3}{8} L_0^2 a_1 c_m & (-1)^{i+1} \frac{1}{16} L_0^3 a_1 c_m & (-1)^i \frac{1}{8} L_0^3 a_1^2 & (-1)^{j+1} \frac{1}{32} L_0^4 a_1^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\gamma_m = -\left(1 + \frac{u_2 - u_1}{L_0}\right) s_m + \left(\frac{3}{2L_0}(v_2 - v_1) - \frac{1}{4}(v_2' - v_1')\right) c_m \quad (28)$$

بردار نیروی داخلی  $p$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$p = \int_{L_0} B^T z dX \quad (29)$$

ماتریس سفتی مماسی  $K$  را با گرفتن اولین وردش از بردار نیروی داخلی  $p$  به صورت زیر نوشته شده است [۲۶].

$$\delta p = \int_{L_0} (B^T \delta z + \delta B^T z) dX = (K_M + K_G) \delta u = K \delta u \quad (30)$$

همچنین  $K_M^b$  سفتی مادی خمشی بوده که در رابطه (۲۵) آورده شده است.

$$K_M^b = \frac{EI_0}{L_0} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{22} & B_{21} \end{bmatrix} \quad (25)$$

که در رابطه (۲۵) داریم:

همچنین پارامترهای تعریف شده در روابط بالا به صورت زیر هستند:

$$s_m = \sin \left[ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{L_0(\varphi_2' - \varphi_1')}{8} \right] \quad (29)$$

$$c_m = \cos \left[ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{L_0(\varphi_2' - \varphi_1')}{8} \right] \quad (30)$$

$$K_G = \int_{L_0} \delta B^T Z dX = K_{GN} + K_{GV} + K_{GM} \quad (34)$$

که  $K_{GN}$ ،  $K_{GV}$  و  $K_{GM}$  به ترتیب سفتی‌های هندسی محوری، برشی و خمشی می‌باشند. تمام درایه‌های  $K_{GM}$  صفر هستند و ماتریس  $K_{GN}$  در رابطه (۳۵) آورده شده‌است.

$$K_{GN} = \frac{N_m}{2} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{22} & N_{21} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$N_{ij}$  در رابطه (۳۵)، در رابطه (۳۶) تعریف شده‌است.

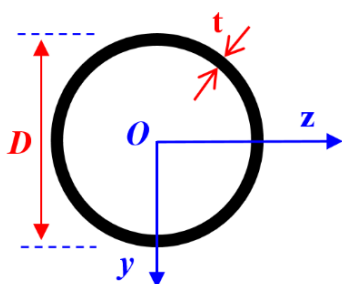
$$N_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (-1)^{i+1} s_m & (-1)^j \frac{1}{4} L_0 s_m \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^i \frac{3}{2} c_m & (-1)^{j+1} \frac{3}{8} L_0 c_m \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} L_0 c_m & (-1)^{i+j+1} \frac{1}{16} L_0^2 c_m \\ (-1)^{i+j} s_m & (-1)^{i+j+1} \frac{3}{2} c_m & \frac{1}{4} L_0 c_m & -\frac{1}{2} L_0 a_1 & (-1)^{i+j} \frac{1}{8} L_0^2 a_1 \\ (-1)^j \frac{1}{4} L_0 s_m & (-1)^{j+1} \frac{3}{8} L_0 c_m & (-1)^i \frac{1}{16} L_0^2 c_m & (-1)^{i+1} \frac{1}{8} L_0^2 a_1 & (-1)^j \frac{1}{32} L_0^3 a_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

همچنین برای  $K_{GV}$  داریم:

$$K_{GV} = \frac{V_m}{2} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{22} & V_{21} \end{bmatrix} \quad (37)$$

که  $V_{ij}$  در رابطه (۳۷)، با استفاده از رابطه (۳۸) محاسبه می‌شود.

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (-1)^{i+1} c_m & (-1)^j \frac{1}{4} L_0 c_m \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{i+1} \frac{3}{2} s_m & (-1)^j \frac{3}{8} L_0 s_m \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} L_0 s_m & (-1)^{i+j} \frac{1}{16} L_0^2 s_m \\ (-1)^{i+j} c_m & (-1)^{i+j} \frac{3}{2} s_m & -\frac{1}{4} L_0 s_m & -\frac{1}{2} L_0 \gamma_m & (-1)^{i+j} \frac{1}{8} L_0^2 \gamma_m \\ (-1)^j \frac{1}{4} L_0 c_m & (-1)^j \frac{3}{8} L_0 s_m & (-1)^{i+1} \frac{1}{16} L_0^2 s_m & (-1)^{i+1} \frac{1}{8} L_0^2 \gamma_m & (-1)^j \frac{1}{32} L_0^3 \gamma_m \end{bmatrix} \quad (38)$$



شکل ۲- سطح مقطع نانوتیبر دایره‌ای

برای تحلیل خیز بزرگ نانوتیبرها بر پایه اثرات سطح، اثرات سطح به مدل معرفی شده در بالا اعمال شده‌است. به منظور در نظر گرفتن خواص مادی متفاوت برای هسته و پوسته، نانوتیبر به صورت یک تیر مرکب از یک هسته همسانگرد و یک پوسته همسانگرد در نظر گرفته شده‌است. همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده‌است هسته و پوسته دارای ضخامت‌های متفاوتی هستند.

تحلیل خیز بزرگ نانوتیرهای با سطح مقطع دایره تحت بار گسترده با در نظر گرفتن اثرات سطح

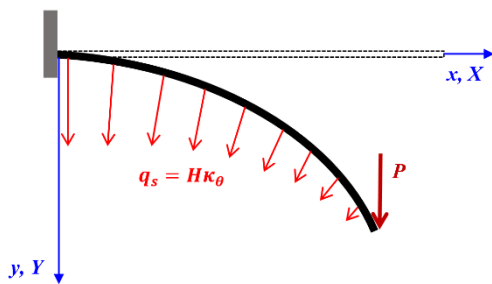
$$\tau = \tau_0 + E_s \varepsilon \quad (45)$$

که در رابطه (۴۵) تنش اولیه یا مانده سطح و  $E_s$  مدول الاستیک سطح است. اثر متقابل تنش بین سطح و حجم در این مدل با معادله یانگ-لاپلاس تعریف شده است. باتوجه به معادله یانگ-لاپلاس عمومی تنش سطح باعث تغییر در تنش نرمال در طول سطح می شود [۲۸-۲۹].

$$\langle \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- \rangle n_i n_j = \tau_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \quad (i, j = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2) \quad (46)$$

که  $\sigma_{ij}^+$  و  $\sigma_{ij}^-$  به ترتیب بیانگر تنش در بالا و پایین سطح نانو تیر هستند.  $n_i$  بردار واحد عمود بر سطح و  $\tau_{\alpha\beta}$  تانسور تنش سطح و  $\kappa_{\alpha\beta}$  تانسور انحنا می باشد. برای نانوتیری با خیز بزرگ، تغییر تنش در سطح باعث ایجاد بار گسترده  $q_s$  در جهت عمود بر محور خنثای نانو تیر در تمام طول آن می شود همانند آنچه که در شکل (۳) نشان داده شده است، که برابر است با:

$$q_s = H \kappa_\theta \quad (47)$$



شکل ۳- نمایش بارگسترده حاصل از تنش سطح در تمام طول تیر تحت بار متمرکز و در جهت عمود بر محور تیر

که  $\kappa_\theta$  انحناى محور خنثای نانوتیر در حالت مفروض (خیز بزرگ) با مشتق  $\theta$  (شیب محور خنثای نانوتیر) نسبت به  $X$  تعریف می شود.

$$\kappa_\theta = \theta' \quad (48)$$

که در رابطه (۴۸)  $H$  یک پارامتر ثابت است که با توجه به شکل سطح مقطع و تنش مانده سطح برای دایره از رابطه (۴۹) محاسبه می شود.

$$H = 2\tau_0 D \quad (49)$$

که  $D$  قطر سطح مقطع دایروی، مانند شکل (۲) می باشد. در رابطه (۴۳) بردار نیروی  $f_e^{(r)}$  یک نیروی ثابت است که با بار خارجی در هر مرحله بارگذاری تعیین شده و در تمام مراحل تکرار هر مرحله بارگذاری، ثابت است. درحالی که، بردار نیروی  $f_s^{(r)}$  از روی یک نیروی وابسته به تغییر شکل (بار گسترده  $q_s$ ) محاسبه شده و لذا، مقدار و جهت آن با تغییر در مؤلفه های بردار جابجایی گرهی  $u$  تغییر

در شکل (۲) لایه سطح دارای ضخامت  $t$  و مدول الاستیسیته  $E_1$  می باشد. ضخامت  $t$  خیلی کوچکتر از قطر  $D$  می باشد. رابطه بین  $E_1$  و  $E_s$  به صورت زیر است:

$$E_s = E_1 t \quad (39)$$

همان طور که در شکل (۲) آمده است، سطح مقطع تیر، به شکل دایره، به صورت هسته و پوسته فرض شده و با روابط مربوط به محاسبه مدول صلابت خمشی تیر مرکب، مدول صلابت خمشی ظاهری یا معادل، به شکل زیر بدست آمده است [۶، ۷، ۲۸]:

$$(EI_0)^* = E \left( \frac{\pi D^4}{64} \right) + E_s \left( \frac{\pi D^3}{8} \right) \quad (40)$$

برای اعمال اثر خواص متفاوت سطح و درون ماده، در روابط بالا مقدار  $EI_0$  با  $(EI_0)^*$ ، یعنی، مدول صلابت خمشی ظاهری جایگزین شده است.

نرخ افزایش بردار جابجایی عمومی  $\delta u$  در هر تکرار با رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\delta u = K^{-1} \delta p \quad (41)$$

بر این اساس، رابطه نرخى (۴۱) را به شکل تکراری زیر نوشته شده است:

$$u^{(r+1)} = u^{(r)} + [K^{(r)}]^{-1} (p^{(r+1)} - p^{(r)}) \quad (42)$$

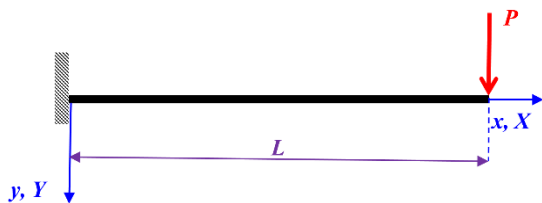
که  $r$  شماره تکرار است. با توجه به غیرخطی بودن مسئله، برای جلوگیری از واگرایی حل عددی، بار خارجی در چندین مرحله اعمال شده است. در هر مرحله بارگذاری،  $p^{(r+1)}$  به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$p^{(r+1)} = f_e^{(r)} + f_s^{(r)} \quad (43)$$

که  $f_e^{(r)}$  بردار نیروی است که از بار خارجی بدست می آید و  $f_s^{(r)}$  بردار نیروی است که به بار گسترده ناشی از اثرات سطح، یعنی  $q_s$  مرتبط است که در ادامه نحوه محاسبه آن آورده شده است. در مطالعه حاضر به منظور بررسی اثرات سطح در تحلیل استاتیکی خمش نانوتیرها از معادله یانگ-لاپلاس عمومی استفاده شده است. در این مدل نانوتیرها به صورت ترکیبی از یک هسته یا حجم و سطح آن در نظر گرفته می شود. از این رو خواص حجم و سطح متفاوت در نظر گرفته می شوند. بر پایه تئوری الاستیسیته کاماراتا [۲۹]، رابطه بین تنش سطح  $(\tau_{\alpha\beta})$  و انرژی سطحی  $(\gamma)$  به صورت رابطه (۴۴) است.

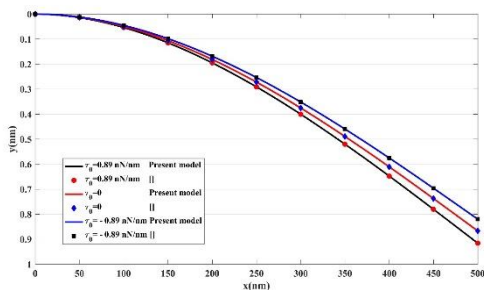
$$\tau_{\alpha\beta} = \gamma \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \quad (44)$$

که در رابطه (۴۴)  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  تانسور کرنش سطح است. رابطه (۴۴) برای نانوتیرها در حالت تک بعدی به صورت رابطه (۴۵) نوشته می شود [۶].



شکل ۴- تیر یکسرگیردار تحت بار متمرکز  $P$  در انتهای آزاد

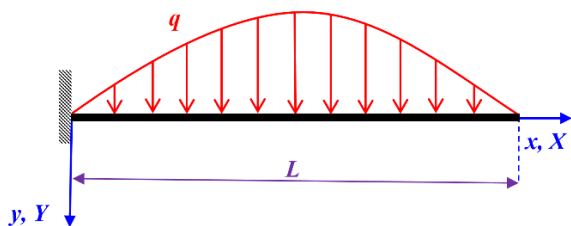
در شکل (۵) خیز نانوتیر برای سه مقدار تنش مانده سطح در  $\tau_0 = -0.89, 0, 0.89$  nN/nm برای مدل حاضر و همچنین جواب حل صریح جیانگ و یان برحسب  $x$  رسم شده است. همان طور که از شکل (۵) مشخص است نتایج حاصل از مدل حاضر تطابق بسیار خوبی با نتایج حل صریح دارند.



شکل ۵- خیز کوچک نانوتیر یکسرگیردار تحت بار متمرکز در انتهای آزاد

### ۵ خیز بزرگ نانوتیرها همراه با اثرات سطح

به منظور بررسی خیز بزرگ نانوتیرها همراه با اثرات سطح از کد نوشته شده بر اساس مدل ارائه شده در مطالعه حاضر استفاده شده است. برای این منظور، یک نانوتیر یکسرگیردار از جنس نقره مطابق شکل (۶) که تحت اثر بار گسترده سینوسی است، در نظر گرفته شده است.



شکل ۶- تیر یکسرگیردار تحت بار گسترده سینوسی

توزیع بار در طول نانوتیر با استفاده از رابطه زیر بیان شده است:

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) \quad (5.0)$$

که  $q_0 = 1$  nN/nm در نظر گرفته شده است.

به منظور بررسی اثر نسبت طول به قطر ( $L/D$ ) بر روی خیز بزرگ نانوتیرها، خیز در دو حالت وجود اثرات سطح ( $SE$ ) و عدم

می‌کنند. در نتیجه، بردار نیروی  $f_s^{(r)}$  باید در هر تکرار به روز رسانی شود. باید در اولین تکرار از اولین مرحله بارگذاری،  $u^{(1)}$  بردار صفر فرض شود و دیگر مقادیر مانند  $p^{(1)}$  و  $f_s^{(1)}$  براساس آن محاسبه شوند. در هر مرحله بارگذاری تکرارها باید به اندازه‌ای ادامه یابند که دقت مورد نظر حاصل گردد.

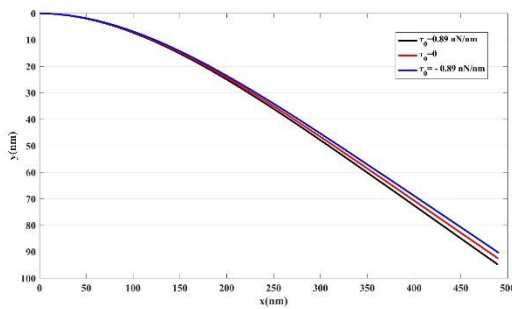
### ۳ نتایج

در این قسمت نتایج عددی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته‌اند. بدین منظور از نقره با مدول الاستیسیته  $E = 76$  GPa، مدول الاستیک سطح  $E_s = 1.22$  nN/nm و تنش مانده سطح  $\tau_0 = 0.89$  nN/nm به عنوان جنس نانوتیر استفاده شده است. همچنین نانوتیر دارای طول  $L = 500$  nm و شعاع  $D = 60$  nm در نظر گرفته شده است. به منظور بررسی خیز کوچک نانوتیرها با اثرات سطح از کد نوشته شده بر اساس مدل جدید استفاده شده است. نتایج برنامه اجزاء محدود حاضر با نتایج حل صریح نانوتیر یکسرگیردار جیانگ و یان [۷] مقایسه و ارزیابی شده‌اند. در ادامه خیز بزرگ نانوتیرها همراه با اثرات سطح بررسی شده است. مدل اجزاء محدود ارائه شده برای تحلیل خیز بزرگ نانوتیرهای با سطح مقطع‌های یکنواخت و غیریکنواخت تحت بارگذاری‌ها و شرایط مرزی دلخواه قابل استفاده می‌باشد در نتیجه خیز بزرگ نانوتیر یکسرگیردار با سطح مقطع دایره‌ای تحت بار گسترده سینوسی به عنوان نمونه بررسی شده است. در ابتدا تاثیر در نظر گرفتن اثرات سطح نسبت به حالت تئوری کلاسیک تیر تیموشکو برای قطرهای متفاوت نانوتیر بررسی شده است. در ادامه تاثیر مقادیر متفاوت مدول الاستیک سطح بر روی خیز بزرگ نانوتیرها، بررسی شده است. در نهایت تاثیر مقادیر مختلف تنش مانده سطح بر روی خیز بزرگ و شیب نانوتیرها بررسی شده است.

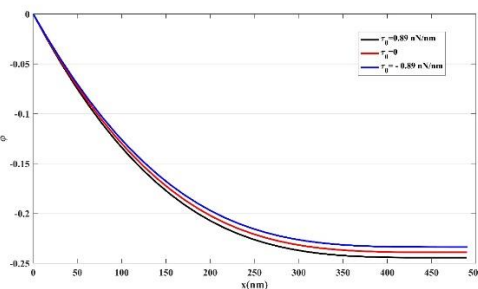
### ۴ راستی آزمایی نتایج با فرض خیز کوچک

به منظور صحت سنجی کد نوشته شده بر اساس مدل جدید، در این قسمت خیز نانوتیرها همراه با اثرات سطح با فرض خیز کوچک بررسی شده است. نانوتیر از جنس نقره بوده و تحت بار متمرکز  $P = 1$  nN می‌باشد. نتایج برنامه اجزاء محدود حاضر با نتایج حل صریح نانوتیر یکسرگیردار جیانگ و یان با فرض خیز کوچک [۷] مقایسه و ارزیابی شده‌اند. حل صریح خمش استاتیکی نانوتیر یکسرگیردار تحت بار متمرکز در انتهای آزاد آن (شکل ۴) با اثرات سطح و با فرض خیز کوچک توسط جیانگ و یان انجام شده است. نتایج این حل برای بررسی دقت و صحت نتایج مدل حاضر به کار گرفته شده است.

تحلیل خیز بزرگ نانوتیرهای با سطح مقطع دایره تحت بار گسترده با در نظر گرفتن اثرات سطح



شکل ۹- خیز بزرگ نانوتیر برای مقادیر مختلف تنش مانده سطح



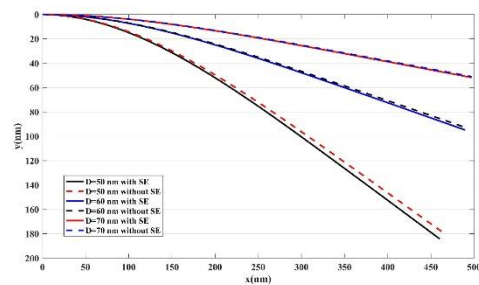
شکل ۱۰- شیب نانوتیر برای مقادیر مختلف تنش مانده سطح

همان طور که در شکل (۹) و (۱۰) نشان داده شده است مقدار مثبت تنش مانده سطح باعث می شود که نانوتیر یکسرگیردار نسبت به حالتی که تنش مانده سطح صفر است، نرم تر شود. این موضوع نشان می دهد که در نظر گرفتن تنش مانده سطح مثبت باعث افزایش خیز و شیب در نانوتیرها می شود. در حالی که برای مقدار منفی تنش مانده سطح این وضعیت برعکس است یعنی مقدار منفی تنش مانده سطح در یک نانو تیر یکسرگیردار باعث سفت تر شدن تیر نسبت به حالت تنش مانده سطح صفر می شود. این موضوع بیان گر این است که وقتی مقدار تنش مانده سطح منفی است، خیز و شیب نانو تیر کاهش می یابد. همان طور که در شکل (۹) نشان داده شده، نانوتیر یکسرگیردار با افزایش تنش مانده سطح رفتار نرم تری از خود نشان داده است. این تعبیر (نرمی نانوتیر) به بار گسترده ناشی از اثرات سطح برگشت دارد که به جهت تقعر محور تیر تحت بار بستگی داشته است، که در تیر یکسرگیردار، باعث افزایش خیز یا همان نرمی شده است. بار گسترده عرضی ناشی از تنش مانده سطح، سفتی نانو تیر را تغییر می دهد، که این موضوع توسط هی و لیلی [۶] و جیانگ و یان [۷] هم ثابت شده است.

## ۶ نتیجه گیری

در این پژوهش خیز بزرگ نانوتیرها همراه با اثرات سطح و با استفاده از فرمول بندی اجزاء محدود کاملاً لاگرانژی مورد بررسی قرار گرفت. اثرات سطح بر اساس معادله یانگ-لاپلاس عمومی فرمول بندی شده و تغییر شکل برشی با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو در نظر

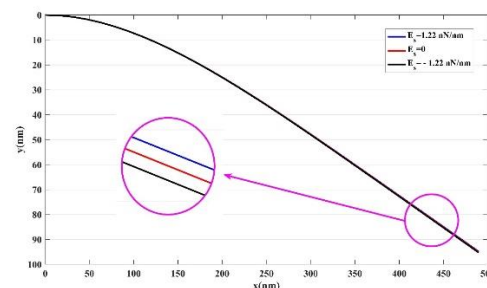
وجود اثرات سطح برای مقادیر مختلف قطر تیر  $D = 50, 60, 70$  nm در شکل (۷) رسم شده است.



شکل ۷- خیز بزرگ نانوتیر در دو حالت وجود اثرات سطح و عدم وجود آن برای مقادیر مختلف قطر

همان طور که در شکل (۷) نشان داده شده با افزایش نسبت  $L/D$  تفاوت بین خیز بدست آمده در حالت وجود اثرات سطح با حالتی که بدون اثرات سطح است بیشتر می شود. یعنی با افزایش نسبت  $L/D$  اثرات سطح تاثیر بیشتری بر روی رفتار خمشی نانو تیرها دارد. این موضوع اهمیت در نظر گرفتن اثرات سطح در نانو تیرهای نازک تر را نشان می دهد.

در ادامه تاثیر مقادیر مختلف مدول الاستیک سطح بر روی خیز بزرگ نانوتیرها بررسی شده است. بدین منظور برای مدول الاستیک سطح سه مقدار  $E_s = -1.22, 0, 1.22$  nN/nm در نظر گرفته شده است. خیز بدست آمده در شکل (۸) رسم شده است.



شکل ۸- خیز بزرگ نانوتیر برای مقادیر مختلف مدول الاستیک سطح

همان طور که در شکل (۸) نشان داده شده است مقدار منفی مدول الاستیک سطح باعث کاهش سفتی نانوتیر و مقدار مثبت آن باعث سفتی بیشتر نانوتیر می شود. این بدین معنی است که در نظر گرفتن مدول الاستیک سطح می تواند باعث نرم تر و یا سفت تر شدن نانوتیر شود که این بستگی به علامت و مقدار مدول الاستیک سطح دارد.

به منظور بررسی تاثیر مقادیر مختلف تنش مانده سطح بر روی خیز و شیب نانوتیرها برای تنش مانده سطح سه مقدار  $\tau_0 = -0.89, 0, 0.89$  nN/nm در نظر گرفته شده است. خیز بدست آمده در شکل (۹) و شیب بدست آمده در شکل (۱۰) رسم شده است.

- [7] L. Jiang and Z. Yan, "Timoshenko beam model for static bending of nanowires with surface effects," *Physica E: Low-dimensional systems and Nanostructures*, vol. 42, no. 9, pp. 2274-2279, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2010.05.007>
- [8] P. Kasirajan, R. Amirtham, and J. N. Reddy, "Surface and non-local effects for non-linear analysis of Timoshenko beams," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 76, pp. 100-111, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.06.006>
- [9] D.-M. Zhao and J.-L. Liu, "New insights on the deflection and internal forces of a bending nanobeam," *Chinese Physics Letters*, vol. 34, no. 9, p. 096201, 2017. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/34/9/096201>
- [10] Y. Yao and S. Chen, "Surface effect in the bending of nanowires," *Mechanics of Materials*, vol. 100, pp. 12-21, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.06.005>
- [11] J. He and Z. Yan, "Surface Effect and nonlocal effect on nanowires bent by a point force at an arbitrary axial position," *IEEE Transactions on Nanotechnology*, vol. 16, no. 4, pp. 527-533, 2016. <https://doi.org/10.1109/TNANO.2016.2639047>
- [12] J. Zou and X.-F. Li, "Effect of the Casimir force on buckling of a double-nanowire system with surface effects," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 18, no. 10, p. 1850118, 2018. <https://doi.org/10.1142/S0219455418501183>
- [13] Y. Taghipour and G. H. Baradaran, "A finite element modeling for large deflection analysis of uniform and tapered nanowires with good interpretation of experimental results," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 114, pp. 111-119, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.05.006>
- [14] Y. Taghipour and G. H. Baradaran, "Large deflection analysis of nanowires based on nonlocal theory using total Lagrangian finite element method," *Acta Mechanica*, vol. 228, pp. 2429-2442, 2017. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1837-0>
- [15] E. R. Estabragh and G. H. Baradaran, "Large amplitude free vibration analysis of nanobeams based on modified couple stress theory," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 21, no. 09, p. 2150129, 2021. <https://doi.org/10.1142/S0219455421501297>
- [16] E. R. Estabragh and G. H. Baradaran, "Analysis of large deflection of nanobeams based on the modified couple stress theory by using finite element method," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 91, no. 12, pp. 4717-4734, 2021. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-02029-6>
- [17] M. Mojahedi, M. M. Zand, and M. Ahmadian, "Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method," *Applied Mathematical Modelling*, vol.

گرفته شده‌است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسئله با فرمول‌بندی اجزاء محدود کاملاً لاگرانژی حل شده‌اند. فرمول‌بندی اجزاء محدودی ارائه شده قابلیت مدل‌سازی نانوتیرهای با سطح مقطع‌های یکنواخت و غیریکنواخت، تحت بارگذاری‌ها و شرایط مرزی دلخواه را دارد. از این رو در این پژوهش، نتایج خیز بزرگ نانوتیر تحت بار گسترده سینوسی بررسی شد. همان‌طور که نتایج بدست آمده نشان داد، با افزایش نسبت  $L/D$  تفاوت بین خیز بدست آمده در حالت وجود اثرات سطح با حالتی که بدون اثرات سطح است بیشتر می‌شود. یعنی با افزایش نسبت  $L/D$  اثرات سطح تاثیر بیشتری بر روی رفتار خمشی نانوتیرها دارد. این موضوع اهمیت در نظر گرفتن اثرات سطح در نانوتیرهای نازک‌تر را نشان می‌دهد. نتایج حاصل نشان داد که مقدار منفی مدول الاستیک سطح باعث کاهش سفتی نانوتیر و مقدار مثبت آن باعث سفتی بیشتر نانوتیر می‌شود. نانوتیر یکسرگیردار با افزایش تنش مانده سطح رفتار نرم‌تری از خود نشان داده‌است. این تعبیر (نرمی نانوتیر) به بار گسترده ناشی از اثرات سطح برگشت دارد که به جهت تفرع محور تیر تحت بار بستگی داشته‌است، که در تیر یکسرگیردار، باعث افزایش خیز یا همان نرمی شده‌است.

## ۷ منابع

- [1] F. Braakman and M. Poggio, "Force sensing with nanowire cantilevers," *Nanotechnology*, vol. 30, no. 33, p. 332001, 2019. <https://doi.org/10.1088/1361-6528/ab19cf/meta>
- [2] M. Ray, "Analysis of smart nanobeams integrated with a flexoelectric nano actuator layer," *Smart Materials and Structures*, vol. 25, no. 5, p. 055011, 2016. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/5/055011>
- [3] D. Liu *et al.*, "Toward a further understanding of size effects in the torsion of thin metal wires: an experimental and theoretical assessment," *International Journal of Plasticity*, vol. 41, pp. 30-52, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.08.007>
- [4] Z. Li, Y. He, J. Lei, S. Guo, D. Liu, and L. Wang, "A standard experimental method for determining the material length scale based on modified couple stress theory," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 141, pp. 198-205, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.035>
- [5] J.-G. Guo and Y.-P. Zhao, "The size-dependent bending elastic properties of nanobeams with surface effects," *Nanotechnology*, vol. 18, no. 29, p. 295701, 2007. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/18/29/295701/meta>
- [6] J. He and C. M. Lilley, "Surface effect on the elastic behavior of static bending nanowires," *Nano letters*, vol. 8, no. 7, pp. 1798-1802, 2008. <https://doi.org/10.1021/nl0733233>

- theory," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 19, no. 06, p. 1950062, 2019. <https://doi.org/10.1142/S0219455419500627>
- [24] F. Lin, L. Tong, H.-S. Shen, C. Lim, and Y. Xiang, "Assessment of first and third order shear deformation beam theories for the buckling and vibration analysis of nanobeams incorporating surface stress effects," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 186, p. 105873, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105873>
- [25] W. M. Lai, D. Rubin, and E. Krempf, *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2009.
- [26] C. A. Felippa, "Nonlinear finite element methods," *Aerospace Engineering Sciences Department of the University of Colorado, Boulder*, 2001.
- [27] C. A. Felippa, "Nonlinear finite element methods," *University of Colorado, Boulder, Colorado, USA*, 2001.
- [28] C. Liu and R. Rajapakse, "Continuum models incorporating surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams," *IEEE Transactions on Nanotechnology*, vol. 9, no. 4, pp. 422-431, 2010. <https://doi.org/10.1109/TNANO.2009.2034142>
- [29] R. C. Cammarata, "Surface and interface stress effects in thin films," *Progress in surface science*, vol. 46, no. 1, pp. 1-38, 1994. [https://doi.org/10.1016/0079-6816\(94\)90005-1](https://doi.org/10.1016/0079-6816(94)90005-1)
- 34, no. 4, pp. 1032-1041, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.07.013>
- [18] P. A. Hassanpour, E. Esmailzadeh, W. L. Cleghorn, and J. K. Mills, "Nonlinear vibration of micromachined asymmetric resonators," *Journal of sound and vibration*, vol. 329, no. 13, pp. 2547-2564, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.10.033>
- [19] D. Zeng and Q. Zheng, "Large deflection theory of nanobeams," *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 23, no. 5, pp. 394-399, 2010. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(10\)60041-9](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(10)60041-9)
- [20] J. He and C. M. Lilley, "The finite element absolute nodal coordinate formulation incorporated with surface stress effect to model elastic bending nanowires in large deformation," *Computational Mechanics*, vol. 44, pp. 395-403, 2009. <https://doi.org/10.1007/s00466-009-0380-9>
- [21] J. Liu, Y. Mei, R. Xia, and W. Zhu, "Large displacement of a static bending nanowire with surface effects," *Physica E: Low-dimensional systems and Nanostructures*, vol. 44, no. 10, pp. 2050-2055, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2012.06.009>
- [22] Y. Sapsathiarn and R. Rajapakse, "A model for large deflections of nanobeams and experimental comparison," *IEEE transactions on nanotechnology*, vol. 11, no. 2, pp. 247-254, 2011. <https://doi.org/10.1109/TNANO.2011.2160457>
- [23] J. Su, Y. Xiang, L.-L. Ke, and Y.-S. Wang, "Surface effect on static bending of functionally graded porous nanobeams based on Reddy's beam