




تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای با رویه FML و هسته FGM با استفاده از یک تئوری پوسته جدید

علی داور^{۱*} , محسن حیدری بنی^۲، رضا آذرافزا^۳، جعفر اسکندری جم^۴

۱- دانشیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.

۲- دانشجوی دکتری، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.


۳- استادیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.

* نویسنده مخاطب: davar78@gmail.com

در این پژوهش، با ارتقای دقت تئوری‌های مرتبه بالایی موجود، تئوری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی مرتبه بالایی تصحیح شده جدید با دوازده مؤلفه جابجایی توسعه داده شده است. در این تئوری، اثر عبارات‌های مربوط به شکل نوزتقه‌ای مقطع پوسته $(1+z/R)$ در نتیجه‌های تنش پوسته به طور دقیق محاسبه شده است. پس از افزودن انرژی کرنشی نظیر تنش‌های اولیه و انرژی کرنشی نظیر جلوگیری از چرخش جسم صلب به تابعی (فانکشنال) انرژی پوسته، بر اساس اصل هامیلتون، معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای دو سر ساده استخراج شده‌اند. با استفاده از این معادلات، تحلیل مقدار ویژه (ارتعاشات آزاد) انجام شده‌اند. اعتبارسنجی نتایج پژوهش حاضر با مقایسه با نتایج تئوری و تجربی سایر محققین و نتایج حاصل از نرم‌افزار ABAQUS صورت پذیرفته، تطابق خوبی حاصل شده است. نتایج نشان می‌دهند که هر چه اثر عبارات‌های $(1+z/R)$ دقیق تر به حساب آید، دقت محاسبه فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، پوسته استوانه‌ای، سازه ساندویچی کامپوزیتی، کامپوزیت الیاف فلز.

Free Vibration Analysis of Cylindrical Sandwich Shells with FML Face and Functionally Graded Core Using a New Shell Theory

A. Davar^{1*} , M. Heydari Beni², R. Azarafza³, J. Eskandari Jam⁴

1, 4. Associate Professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

2. PhD student, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

3. Assistant Professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

*Corresponding Author: davar78@gmail.com

In this research, by improving the accuracy of existing high-order theories, a new corrected high-order composite cylindrical shell theory with twelve displacement components has been developed. In this theory, the effect of terms related to the trapezoidal shape of the shell cross-section $(1+z/R)$ in the results of the shell stress has been accurately calculated. After adding the strain energy such as the initial stresses and the strain energy such as the prevention of the rotation of the rigid body to the shell energy functional, based on Hamilton's principle, the equilibrium equations of the cylindrical shell with two ends have been derived. By using these equations, eigenvalue analysis (free vibrations) have been performed. Validation of the results of the present research was done by comparing with the theoretical and experimental results of other researchers and the results of the ABAQUS software, and a good match has been achieved.

Keywords: Free vibrations; cylindrical shell, composite sandwich structure, FML



COPYRIGHTS

© 2023 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

How to Cite this in Article:

A. Davar, M. Heydari Beni, R. Azarafza, J. Eskandari Jam, " Free Vibration Analysis of Cylindrical Sandwich Shells with FML Face and Functionally Graded Core Using a New Shell Theory," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, vol. 7, no. 4, pp. 35-49, 2024 (in Persian).

۱ مقدمه

دانش خصوصیات ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی، هم برای درک عمومی مبانی رفتار این پوسته‌ها و هم به منظور فهم کاربردهای صنعتی آنها بسیار مهم است. در ارتباط با مفهوم کاربرد صنعتی، بایستی فرکانس‌های طبیعی پوسته به‌منظور جلوگیری از اثر تشدید شناخته شوند. اهمیت پیشگویی دقیق خواص ارتعاشی بخاطر صرفه‌جویی در وزن، بطور فزاینده‌ای در طراحی سازه‌های هوافضایی کامپوزیتی رو به رشد است. همچنین گاهی اوقات در صنعت مواردی پیش می‌آید که لازم است مقدار تغییر شکل‌ها و تغییر مکان‌های سازه را تحت اثر یک تحریک خارجی بدانیم. در چنین مواردی باید پاسخ دینامیکی سازه (از قبیل شتاب، سرعت، تغییر مکان، تنش و کرنش) به این تحریک، محاسبه، بررسی و کنترل شود.

شینمن و گریف [۱] یک روش عمومی تحلیلی و عددی برای ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های دورانی جدار نازک ساخته شده از مواد الاستیک ارتوتروپیک لایه‌ای با چیدمان دلخواه برای شرایط مرزی مختلف ارائه دادند. در این روش، تابع بار به صورت عمومی در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت با کمک اصل هامیلتون به دست آمده و حل عددی آنها با بسط متغیرها بصورت سری‌های فوریه در جهت محیطی صورت گرفته است، از المان‌های مخروطی شکل در جهت طولی استفاده شده است. حل معادلات نسبت به هندسه پوسته، تعداد و زوایای لایه‌ها و تابع بار، عمومی در نظر گرفته شده است.

جعفری و همکاران [۲] و آذرافزا [۳] (۱۳۸۴) پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت تنش‌های اولیه و ایمپالس جانبی را مطالعه کردند. ایشان ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با شرایط مرزی مختلف را تحت بار ایمپالس جانبی وارد بر روی یک سطح مستطیلی و با در نظر گرفتن اثرات پیش‌تنیدگی (مانند نیروی محوری و فشار داخلی) بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تقریب اول لاو مورد بررسی قرار دادند. آنها حل معادلات ارتعاشات آزاد را با استفاده از روش گالرکین انجام دادند. با استفاده از نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد و با استفاده از انتگرال کانولوشن، پاسخ زمانی مؤلفه‌های جابجایی را بر اساس روش جمع مودها رسم کردند. اثر زاویه الیاف، شرایط مرزی، بار محوری فشاری و پارامترهای هندسی را روی رفتار دینامیکی پوسته بررسی کردند. ایشان به این نتیجه دست یافتند که پیش‌تنیدگی تأثیر زیادی روی فرکانس طبیعی و پاسخ دینامیکی دارد.

خلیلی و همکاران [۴] پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت تنش‌های اولیه و ایمپالس جانبی را مطالعه کردند. ایشان ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با شرایط مرزی ساده را با در نظر گرفتن اثر

نیروی محوری توأم با فشار داخلی، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تقریب اول لاو مورد بررسی قرار دادند. ایشان پس از مطالعه اثر نیروی محوری توأم با فشار داخلی روی پاسخ زمانی پوسته، به این نتیجه دست یافتند که فرکانس طبیعی و پاسخ دینامیکی پوسته کامپوزیتی جدارنازک، نسبت به فشار داخلی حساسیت بیشتری در مقایسه با نیروی محوری دارد.

ستوده و انفرادی [۵] ضربه سرعت پایین روی پوسته‌های کامپوزیتی رشته پیچی را به روش عددی با استفاده از نرم افزار المان محدود ABAQUS بررسی کردند. آنالیز ارتعاشات آزاد و آنالیز دینامیکی به روش ضمنی (implicit) را برای مطالعه اثر میرایی روی پاسخ پوسته کامپوزیتی چندلایه در معرض بارگذاری ضربه با سرعت پایین انجام دادند. آنها اثر میرایی سازه‌ای را بر روی نیروی تماس، خیز نقطه محل تماس و سرعت و انرژی جسم ضربه زننده مطالعه کردند. نتایج آنها نشان داد که میرایی سازه‌ای سبب افزایش نیروی تماس و کاهش خیز نقطه محل تماس می‌شود. همچنین انرژی تلف شده ناشی از میرایی سازه‌ای، در مقابل انرژی سیستم بدون میرایی قابل صرف‌نظر است.

رحمانی و همکاران [۶] رفتار پوسته ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را با استفاده از اصل هامیلتون مورد مطالعه قرار دادند. آنها تئوری مرتبه بالای جدید برای تحلیل رفتار دینامیکی پوسته‌های ساندویچی ضخیم ارائه دادند. برای مدل‌سازی اثر رویه‌ها از تئوری کلاسیک پوسته و برای مدل‌سازی هسته از تئوری الاستیسیته بهره بردند. اثرات غیرخطی صفحه‌ای و جابجایی‌های قائم هسته را در تئوری مرتبه بالا لحاظ کردند. آنها متوجه‌های تنش و جابجایی‌ها در رویه‌ها و هسته و تنش‌های برشی و نرمال متقابل بین هسته و رویه‌ها را در معادلات وارد کردند. آنها به این نتیجه دست یافتند که الگوهای ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی پیچیده‌تر از پوسته‌های استوانه‌ای همگن است.

ارژنگ پی و همکاران [۷] مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای متشکل از مواد هدفمند یا موادی با خواص تابعی (FGM) را ارائه دادند. در تحلیل به کاررفته آنها، معادلات میدان جابجایی بر مبنای تئوری دائل و فرضیه تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج گردیده و پوسته‌ی مورد نظر از ترکیب پیوسته سرامیک و فلز فرض شده است. معادلات حاکم بر پوسته به صورت عددی و با استفاده از روش بدون المان محلی پتروف گلرکین یا به اختصار MLPG حل شده‌اند. بدین منظور، فرم جدیدی از تابع تغییر در نظر گرفته شد که منجر به دستیابی ماتریس‌های جرم و سفتی شده و در نتیجه فرکانس طبیعی پوسته تحت شرایط تکیه گاهی مختلف محاسبه شده است.

ارائه شده تاکنون، تئوری دوبعدی پوسته کامپوزیتی توسعه داده شده است. در این تئوری علاوه بر در نظر گرفتن میدان جابجایی از مرتبه بالا، کرنش‌های نرمال عرضی تا مرتبه دوم در نظر گرفته شده و اثر عبارت $I+z/R$ نیز به طور دقیق در نظر گرفته شده است.

به منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد به همراه شکل مودهای متناظر، به حل معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای، پرداخته شده است. به منظور تحلیل پوسته استوانه‌ای و استخراج معادلات تعادل، ابتدا فرضیات زیر مد نظر قرار گرفته‌اند:

- تغییر شکل‌های پوسته کوچک در نظر گرفته شده‌اند.
- ابعاد (طول و قطر) پوسته محدود در نظر گرفته شده‌اند.
- از اثر میرایی صرف‌نظر شده است.
- ماده در محدوده الاستیک خطی قرار دارد.
- اثر عبارات غیرخطی در معادلات مد نظر قرار نگرفته است.

۲ معادلات حاکم

معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای برای انجام تحلیل دینامیکی، با استفاده از اصل هامیلتون و به منظور تحلیل استاتیکی، از ویرایش استاتیکی اصل هامیلتون^۳ یعنی اصل کار مجازی^۴ استفاده می‌شود. صورت تحلیلی اصل هامیلتون را می‌توان به طریق زیر بیان کرد [۱۱]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [U - W - K] dt = 0 \quad (1)$$

U در رابطه (۱) عبارت است از انرژی کرنشی کل ناشی از تغییر شکل و به صورت زیر تعریف شده است:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\sigma_z \epsilon_z + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{z\theta} \epsilon_{\theta z} + \sigma_{\theta z} \epsilon_{z\theta} \right] dAdz$$

که در رابطه (۲)، تعریف المان سطح پوسته به صورت زیر است [۸]:

$$dA = R(1 + \gamma_0 \frac{z}{R}) dx d\phi \quad (3)$$

البته علاوه بر انرژی کرنشی معرفی شده در رابطه (۲)، دو عبارت دیگر نیز به این انرژی باید افزوده شود. یکی انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های اولیه^۵ دیگری انرژی کرنشی برای جلوگیری از چرخش جسم صلب ۶ که ساندرز [۱۲] به انرژی کرنشی کل پوسته اضافه کرد.

W در رابطه (۱) عبارت است از انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی و به صورت زیر تعریف شده است:

زارعی و رحیمی [۸] در پژوهشی به منظور تحلیل ارتعاشات آزاد استوانه کامپوزیتی مشبک دوار با تکیه‌گاه‌های مختلف با استفاده تقریبی معادل‌سازی برای معادل‌کردن سختی تقویت‌کننده‌ها استفاده گردید. تقویت‌کننده‌ها به صورت تیر در نظر گرفته شدند که قادر به تحمل نیروهای برشی و ممان خمشی نسبت به بار محوری وارده بودند. معادلات مربوط به آنالیز ارتعاشی بر مبنای تئوری ساندرز استخراج و با استفاده بسط سری فوریه تبدیل استوکس فرکانس ارتعاشات پوسته استوانه‌ای تعیین گردید.

موسوی و همکاران [۹] به تحلیل دینامیکی و ارتعاشاتی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از لایه‌های گرافیت اپوکسی به همراه دو لایه پیزوالکتریک در دو سطح داخلی و خارجی آن پرداختند. استخراج معادلات حرکت بر پایه تئوری ساندرز برای پوسته‌های نازک انجام شده است. معادلات حرکت که به صورت مشتق‌های جزئی محاسبه شده و به روش رانگ کوتای مرتبه چهارم حل شده‌اند.

ژاو^۷ و همکاران [۱۰] دنباله‌ای از تجمع بر روی ارتعاش پوسته استوانه‌ای ورقه‌ای فلزی الیافی (Fiber-Metal Laminate یا FML) در فاز میکرو با استفاده از نظریه تنش کوپل توسعه یافته است. از اصل هامیلتون برای استخراج معادلات غیر کلاسیک حرکت پوسته استوانه‌ای نازک وابسته به اندازه بر اساس اولین نظریه تقریب لاو استفاده شده است. Mori-Tanaka و قانون توسعه یافته مخلوط به ترتیب برای تخمین ویژگی‌های مکانیکی نانولوله‌های کربنی و فیبر معادل آن استفاده شدند. این پوسته میکرو استوانه‌ای چهار فاز CNTs/فیبر/پلیمر/فلز ورقه‌ای (CNTFPML) با استفاده از مدل عملکرد مودال پرتو برای چندین محدودیت مرزی تحلیل شد.

با توجه به کمبودهای پژوهش‌های گذشته در حوزه تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی، در پژوهش حاضر به ارائه تئوری مرتبه بالای جدید و با دقت بالا برای تحلیل سازه‌ای پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی پرداخته می‌شود. برخی از محققین با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به تحلیل پوسته‌های کامپوزیتی پرداخته‌اند. لیکن استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی هنگامی که پوسته از جنس ماده با درجه ناهمسانگردی بالا و تحت بارگذاری نامتقارن و پیچیده قرار گیرد، سبب می‌شود حجم محاسبات فوق‌العاده بالا رفته، تحلیل مسأله نیز بسیار پیچیده شود. لذا تاکنون اکثر محققین با بهره‌گیری از تئوری‌های مرتبه بالای دو بعدی، پوسته‌های استوانه‌ای را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند. از طرف دیگر، تاکنون اکثر محققین با استفاده از تئوری دوبعدی تک لایه معادل به بررسی پدیده ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه پرداخته‌اند. لذا در این پژوهش به منظور افزایش دقت تئوری‌های دوبعدی

4. Principle of virtual work
5. Initial stresses

2. Zhao
3. Hamilton's principle

و با در نظر گرفتن ضرایب تاثیر و مختصرنویسی، به صورت رابطه (۸-ب) در می‌آیند:

$$\begin{aligned} w &= w_0 + C_1 z \theta_z + C_1 z^2 w_0^* + C_2 z^3 \theta_z^* \\ v &= (1 + \gamma_0 z/R) v_0 + z \theta_\phi + C_3 z^2 v_0^* + C_4 z^3 \theta_\phi^* \\ u &= u_0 + z \theta_x + C_3 z^2 u_0^* + C_4 z^3 \theta_x^* \end{aligned} \quad (8-b)$$

C_1 تا C_4 ضرایب تعیین کننده نوع تئوری به کار رفته و $\gamma_0 = 1$ ضریب اثر شکل مقطع پوسته هستند. با جایگذاری مؤلفه‌های جابجایی از روابط (۸) در رابطه (۷)، تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta K dt &= - \int_0^t \int_A \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dA dt \\ &= - \int_0^t \int_A \rho \left[\begin{aligned} &(\ddot{u}_0 + z \ddot{\theta}_x + C_3 z^2 \ddot{u}_0^* + C_4 z^3 \ddot{\theta}_x^*) \times \\ &(\delta u_0 + z \delta \theta_x + C_3 z^2 \delta u_0^* + C_4 z^3 \delta \theta_x^*) \\ &+ (\ddot{v}_0 (1 + \gamma_0 z/R) + z \ddot{\theta}_\phi + C_3 z^2 \ddot{v}_0^* + C_4 z^3 \ddot{\theta}_\phi^*) \times \\ &(\delta v_0 (1 + \gamma_0 z/R) + z \delta \theta_\phi + C_3 z^2 \delta v_0^* + C_4 z^3 \delta \theta_\phi^*) \\ &+ (\ddot{w}_0 + C_1 z \ddot{\theta}_z + C_1 z^2 \ddot{w}_0^* + C_2 z^3 \ddot{\theta}_z^*) \times \\ &(\delta w_0 + C_1 z \delta \theta_z + C_1 z^2 \delta w_0^* + C_2 z^3 \delta \theta_z^*) \end{aligned} \right] dA dt \end{aligned} \quad (9)$$

۲.۲ محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی

برای راحتی در نوشتن عبارت‌های مربوط به محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی و انرژی کرنشی، از نمایش عبارت $\int_0^t () dt$ صرف نظر شده است.

با جایگذاری مؤلفه‌های جابجایی از روابط (۸) در رابطه (۳)، تغییرات انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W_{i0} + \delta W_0 = \\ &\delta \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\begin{aligned} &\hat{\sigma}_x (u_0 + z \theta_x + C_3 z^2 u_0^* + C_4 z^3 \theta_x^*) \\ &+ \hat{\sigma}_{x\phi} ((1 + \gamma_0 z/R) v_0 + z \theta_\phi + C_3 z^2 v_0^* + C_4 z^3 \theta_\phi^*) \\ &+ \hat{\sigma}_{xz} (w_0 + C_1 z \theta_z + C_1 z^2 w_0^* + C_2 z^3 \theta_z^*) \end{aligned} \right] (1 + \gamma_0 z/R) R d\phi dz \\ &+ \delta \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\begin{aligned} &q_i (w_0 + C_1 (h/2) \theta_z + C_1 (h/2)^2 w_0^* + C_2 (h/2)^3 \theta_z^*) \\ &+ q_b (w_0 - C_1 (h/2) \theta_z + C_1 (h/2)^2 w_0^* - C_2 (h/2)^3 \theta_z^*) \end{aligned} \right] dA \end{aligned} \quad (10)$$

پس از انتگرال‌گیری در راستای ضخامت (z) در انتگرال اول و بازنویسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\begin{aligned} &\hat{N}_x \delta u_0 + \hat{M}_{x\phi} \delta v_0 + C_3 \hat{N}_x \delta u_0^* + C_4 \hat{M}_{x\phi} \delta v_0^* \\ &+ \hat{N}_{x\phi} \delta v_0 + \hat{M}_{x\phi} \gamma_0 / R \delta v_0 + \hat{M}_{x\phi} \delta \theta_\phi + C_3 \hat{N}_{x\phi} \delta v_0^* \\ &+ C_4 \hat{M}_{x\phi} \delta \theta_\phi^* + \hat{Q}_z \delta w_0 + C_1 \hat{S}_x \delta \theta_z + C_1 \hat{Q}_z \delta w_0^* + C_2 \hat{S}_x \delta \theta_z^* \end{aligned} \right] R d\phi \\ &+ \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\begin{aligned} &q_i \delta w_0 + q_i C_1 (h/2) \delta \theta_z + q_i C_1 (h/2)^2 \delta w_0^* \\ &+ q_i C_2 (h/2)^3 \delta \theta_z^* + q_b \delta w_0 - q_b C_1 (h/2) \delta \theta_z \\ &+ q_b C_1 (h/2)^2 \delta w_0^* - q_b C_2 (h/2)^3 \delta \theta_z^* \end{aligned} \right] dA \end{aligned} \quad (11)$$

$$W = W_x + W_0 = \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} [\hat{\sigma}_x u + \hat{\sigma}_{x\phi} v + \hat{\sigma}_{xz} w] (1 + \gamma_0 z/R) R d\phi dz + \int_0^L \int_0^{2\pi} [q_i w(z = +h/2) + q_b w(z = -h/2)] dA \quad (4)$$

که در رابطه (۴)، W_x کار نیروهای لبه‌ای در مرزها و W_0 کار نیروهای سطحی هستند. همچنین $\hat{\sigma}_x$ ، $\hat{\sigma}_{x\phi}$ و $\hat{\sigma}_{xz}$ تنش‌های استاتیکی ثابت لبه‌ای و q_i و q_b فشارهای گسترده وارد بر سطوح به ترتیب خارجی و داخلی پوسته هستند. K در رابطه (۱) انرژی جنبشی می‌باشد و به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} \rho [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dA dz \end{aligned} \quad (5)$$

به منظور حل مسأله مورد نظر، رابطه (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\int_0^t [\delta U - \delta W - \delta K] dt = 0$$

در ادامه، به محاسبه هر یک از عبارت‌های δW ، δU و δK پرداخته شده است.

۱.۲ محاسبه تغییرات انرژی جنبشی

با جایگذاری رابطه انرژی جنبشی در رابطه (۵)، سهم انرژی جنبشی در تغییرات تابعی δW انرژی در اصل هامیلتون به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\int_0^t \delta K dt = \frac{1}{2} \iiint_V \rho [2\dot{u} \delta \dot{u} + 2\dot{v} \delta \dot{v} + 2\dot{w} \delta \dot{w}] dV dt \quad (6)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء نسبت به زمان داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta K dt &= - \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dA dz dt \\ &+ \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] dA dz dt \end{aligned} \quad (7)$$

انتگرال دوم (سطر دوم) در رابطه (۷)، بنا بر پیش فرض در اصل هامیلتون، برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. به این معنی که تغییرات متغیرها در زمان‌های ابتدا و انتهای تحلیل، برابر صفر فرض می‌شوند. مؤلفه‌های جابجایی به صورت رابطه (۸-الف) در نظر گرفته می‌شوند:

$$u(x, \phi, z, t) = u_0(x, \phi, t) + z \theta_x(x, \phi, t) + z^2 u_0^*(x, \phi, t) + z^3 \theta_x^*(x, \phi, t)$$

$$v(x, \phi, z, t) = (1 + z/R) v_0(x, \phi, t) + z \theta_\phi(x, \phi, t) + z^2 v_0^*(x, \phi, t) + z^3 \theta_\phi^*(x, \phi, t) \quad (8)$$

$$w(x, \phi, z, t) = w_0(x, \phi, t) + z \theta_z(x, \phi, t) + z^2 w_0^*(x, \phi, t) + z^3 \theta_z^*(x, \phi, t) \quad (الف)$$

که γ_0 همان ضریب اثر شکل دوزنقه‌ای مقطع پوسته است و می‌تواند یکی از مقادیر ۰ یا ۱ باشد. در اینجا چون از تئوری اصلاح شده پوسته استفاده شده است، مقدار $\gamma_0 = 1$ مد نظر است. همچنین در روابط (۱۴-الف)، عبارتهای داخل پرانتز به صورت روابط (۱۴-ب) قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & \chi_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{\varphi 0} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} w_0 & \chi_{\varphi 0} &= \gamma_0 \frac{1}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial \varphi} + C_1 \frac{1}{R} \theta_z \\ \varepsilon_{\varphi x 0} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} & \chi_{\varphi x} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_x}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_{x \varphi 0} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} & \chi_{x \varphi} &= \gamma_0 \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial x} \\ \varepsilon_{x0}^* &= C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} & \chi_{z0}^* &= C_2 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_z^*}{\partial \varphi} - C_4 \frac{1}{R} \theta_z^* \\ \varepsilon_{\varphi 0}^* &= C_3 \frac{1}{R} \frac{\partial v_0^*}{\partial \varphi} + C_1 \frac{1}{R} w_0^* & \chi_x^* &= C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \\ \varepsilon_{\varphi x 0}^* &= C_3 \frac{1}{R} \frac{\partial u_0^*}{\partial \varphi} & \chi_{\varphi x}^* &= C_4 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_\varphi^*}{\partial \varphi} + C_2 \frac{1}{R} \theta_z^* \\ \varepsilon_{x \varphi 0}^* &= C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial x} & \chi_{\varphi x}^* &= C_4 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_x^*}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_{z0}^* &= 3C_2 \theta_z^* & \chi_{x z}^* &= 2C_3 u_0^* + C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \varepsilon_{z0} &= C_1 \theta_z & \chi_{\varphi z 0} &= C_1 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial \varphi} - \gamma_0 \frac{1}{R^2} v_0 - \frac{1}{R} \theta_\varphi \\ \beta_x &= \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} & \chi_{\varphi z 1} &= 2C_3 v_0^* \\ \beta_{\varphi 0} &= \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} v_0 & \chi_{x z}^* &= C_2 \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} \\ \beta_{\varphi 1} &= \gamma_0 \frac{1}{R} v_0 + \theta_\varphi \\ \beta_x^* &= 3C_4 \theta_x^* + C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \\ \beta_{\varphi 0}^* &= C_1 \frac{1}{R} \frac{\partial w_0^*}{\partial \varphi} - C_3 \frac{1}{R} v_0^* \\ \beta_{\varphi 1}^* &= 3C_4 \theta_\varphi^* \end{aligned} \quad (۱۴)$$

با جایگذاری مؤلفه‌های کرنش از روابط (۱۴-الف) در رابطه (۱۳)، خواهیم داشت:
- تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_x :

که در رابطه (۱۱)، تعریف مقادیر حاصل از انتگرال‌گیری در راستای ضخامت (z) در انتگرال اول به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \hat{\sigma}_x(1, z, z^2, z^3)(1 + \gamma_0 z/R) dz \\ &(\hat{N}_{x\varphi}, \hat{M}_{x\varphi}, \hat{N}_{x\varphi}^*, \hat{M}_{x\varphi}^*) = \\ &\int_{-h/2}^{+h/2} \hat{\sigma}_{x\varphi}(1, z, z^2, z^3)(1 + \gamma_0 z/R) dz \quad (۱۲) \\ &(\hat{Q}_x, \hat{S}_x, \hat{Q}_x^*, \hat{S}_x^*) = \\ &\int_{-h/2}^{+h/2} \hat{\sigma}_{xz}(1, z, z^2, z^3)(1 + \gamma_0 z/R) dz \end{aligned}$$

۳.۲ محاسبه تغییرات انرژی کرنشی

با توجه به رابطه (۲)، تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر است:

$$\int_0^l \delta U dt = \iiint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{x\varphi} \delta \varepsilon_{x\varphi} + \sigma_{x\varphi} \delta \varepsilon_{x\varphi} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \sigma_{\varphi z} \delta \varepsilon_{\varphi z} \right] dAdz dt \quad (۱۳)$$

کرنش‌های خطی بر حسب جایجایی‌های سطح میانی، برای هر مدل جایجایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\varepsilon_{x0} + z\chi_x + z^2\varepsilon_{x0}^* + z^3\chi_x^*) \\ \varepsilon_\varphi &= (\varepsilon_{\varphi 0} + z\chi_\varphi + z^2\varepsilon_{\varphi 0}^* + z^3\chi_\varphi^*) \\ &\frac{1}{1 + \gamma_0 z/R} \\ \varepsilon_{\varphi x} &= (\varepsilon_{\varphi x 0} + z\chi_{\varphi x} + z^2\varepsilon_{\varphi x 0}^* + z^3\chi_{\varphi x}^*) \\ &\frac{1}{1 + \gamma_0 z/R} \quad (۱۴) \\ \varepsilon_{x\varphi} &= (\varepsilon_{x\varphi 0} + z\chi_{x\varphi} + z^2\varepsilon_{x\varphi 0}^* + z^3\chi_{x\varphi}^*) \\ \varepsilon_z &= (\varepsilon_{z0} + z\chi_z + z^2\varepsilon_{z0}^*) \\ \chi_{xz} &= (\beta_x + z\chi_{xz} + z^2\beta_x^* + z^3\chi_{xz}^*) \\ \chi_{\varphi z} &= (\beta_{\varphi 0} + z\chi_{\varphi z 0} + z^2\beta_{\varphi 0}^* + z^3\chi_{\varphi z 0}^*) \\ &\frac{1}{1 + \gamma_0 z/R} \\ &+ (\beta_{\varphi 1} + z\chi_{\varphi z 1} + z^2\beta_{\varphi 1}^*) \end{aligned} \quad (الف)$$

$$\begin{aligned} & \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{x\varphi} \delta \varepsilon_{\varphi x} dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{x\varphi} (\delta \varepsilon_{\varphi x 0} + z \delta \chi_{\varphi x} + z^2 \delta \varepsilon_{\varphi x 0}^* + z^3 \delta \chi_{\varphi x}^*) (1 + \gamma_0 z/R)^{-1} dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{x\varphi} \left[\begin{aligned} & \delta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + z \delta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \theta_z}{\partial \varphi} \right) \\ & + z^2 \delta \left(C_3 \frac{1}{R} \frac{\partial u_0^*}{\partial \varphi} \right) + z^3 \delta \left(C_4 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_z^*}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right] (1 + \gamma_0 z/R)^{-1} dAdz \quad (18) \\ &= - \iint_A \left[\frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} \delta u_0 + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} \delta \theta_z + C_3 \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\varphi}^*}{\partial \varphi} \delta u_0^* + C_4 \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}^*}{\partial \varphi} \delta \theta_z^* \right] dA \end{aligned}$$

- تغییرات انرژی کرنشی متناظر با $\varepsilon_{x\varphi}$:

$$\begin{aligned} & \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{x\varphi} \delta \varepsilon_{x\varphi} dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{x\varphi} (\delta \varepsilon_{x\varphi 0} + z \delta \chi_{x\varphi} + z^2 \delta \varepsilon_{x\varphi 0}^* + z^3 \delta \chi_{x\varphi}^*) dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{x\varphi} \left[\delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \delta \left(\frac{\gamma_0}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + z^2 \delta \left(C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial x} \right) + z^3 \delta \left(C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right) \right] dAdz \quad (19) \\ &= - \iint_A \left[\begin{aligned} & \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} \delta v_0 + \frac{\gamma_0}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \delta v_0 + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \delta \theta_x \\ & + C_3 \frac{\partial N_{x\varphi}^*}{\partial x} \delta v_0^* + C_4 \frac{\partial M_{x\varphi}^*}{\partial x} \delta \theta_x^* \end{aligned} \right] dA \\ &+ \int_0^{2\pi} \left[N_{x\varphi} \delta v_0 + \frac{\gamma_0}{R} M_{x\varphi} \delta v_0 + M_{x\varphi} \delta \theta_x + C_3 N_{x\varphi}^* \delta v_0^* + C_4 M_{x\varphi}^* \delta \theta_x^* \right]_0^L R d\varphi \end{aligned}$$

- تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_{xz} :

$$\begin{aligned} & \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} (\delta \beta_x + z \delta \chi_{xz} + z^2 \delta \beta_x^* + z^3 \delta \chi_{xz}^*) dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} \left[\begin{aligned} & \delta \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + z \delta \left(2C_3 u_0^* + C_1 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ & + z^2 \delta \left(3C_4 \theta_x^* + C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \right) + z^3 \delta \left(C_2 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right) \end{aligned} \right] dAdz \quad (20) \\ &= - \iint_A \left[\begin{aligned} & -Q_x \delta \theta_x - 2C_3 S_x \delta u_0^* - 3C_4 Q_x^* \delta \theta_x^* + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w_0 \\ & + C_1 \frac{\partial S_x}{\partial x} \delta \theta_x + C_1 \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w_0^* + C_2 \frac{\partial S_x^*}{\partial x} \delta \theta_x^* \end{aligned} \right] dA \\ &+ \int_0^{2\pi} \left[Q_x \delta w_0 + C_1 S_x \delta \theta_x + C_1 Q_x^* \delta w_0^* + C_2 S_x^* \delta \theta_x^* \right]_0^L R d\varphi \end{aligned}$$

- تغییرات انرژی کرنشی متناظر با $\varepsilon_{\varphi z}$:

$$\begin{aligned} & \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \delta \varepsilon_x dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x (\delta \varepsilon_{x0} + z \delta \chi_x + z^2 \delta \varepsilon_{x0}^* + z^3 \delta \chi_x^*) dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \left[\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + z \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + z^2 \delta \left(C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} \right) + z^3 \delta \left(C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \right) \right] dAdz \quad (15) \\ &= - \iint_A \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \theta_x + C_3 \frac{\partial N_x^*}{\partial x} \delta u_0^* + C_4 \frac{\partial M_x^*}{\partial x} \delta \theta_x^* \right] dA \\ &+ \int_0^{2\pi} \left[N_x \delta u_0 + M_x \delta \theta_x + C_3 N_x^* \delta u_0^* + C_4 M_x^* \delta \theta_x^* \right]_0^L R d\varphi \end{aligned}$$

- تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_φ :

$$\begin{aligned} & \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi (\delta \varepsilon_{\varphi 0} + z \delta \chi_\varphi + z^2 \delta \varepsilon_{\varphi 0}^* + z^3 \delta \chi_\varphi^*) (1 + \gamma_0 z/R)^{-1} dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi \left[\begin{aligned} & \delta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} w_0 \right) \\ & + z \delta \left(\frac{\gamma_0}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_x}{\partial \varphi} + C_1 \frac{1}{R} \theta_z \right) \\ & + z^2 \delta \left(C_3 \frac{1}{R} \frac{\partial v_0^*}{\partial \varphi} + C_1 \frac{1}{R} w_0^* \right) \\ & + z^3 \delta \left(C_4 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_x^*}{\partial \varphi} + C_2 \frac{1}{R} \theta_z^* \right) \end{aligned} \right] (1 + \gamma_0 z/R)^{-1} dAdz \quad (16) \\ &= - \iint_A \left[\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} \delta v_0 + \frac{\gamma_0}{R^2} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \delta v_0 + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \delta \theta_x + C_3 \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi^*}{\partial \varphi} \delta v_0^* \\ & + C_1 \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi^*}{\partial \varphi} \delta \theta_x^* - \frac{1}{R} N_\varphi \delta w_0 - C_1 \frac{1}{R} M_\varphi \delta \theta_z - C_1 \frac{1}{R} N_\varphi^* \delta w_0^* \\ & - C_2 \frac{1}{R} M_\varphi^* \delta \theta_z^* \end{aligned} \right] dA \end{aligned}$$

- تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_z :

$$\begin{aligned} & \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_z \delta \varepsilon_z dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_z (\delta \varepsilon_{z0} + z \delta \chi_z + z^2 \delta \varepsilon_{z0}^*) dAdz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_z \left[\delta (C_1 \theta_z) + z \delta (2C_1 w_0^*) + z^2 \delta (3C_2 \theta_z^*) \right] dAdz \quad (17) \\ &= - \iint_A \left[-C_1 N_z \delta \theta_z - 2C_1 M_z \delta w_0^* - 3C_2 N_z^* \delta \theta_z^* \right] dA \end{aligned}$$

- تغییرات انرژی کرنشی متناظر با $\varepsilon_{\varphi x}$:

عبارت‌های زیر انتگرال در رابطه (۲) برخوردار شوند [۱۳]. کرنش‌های غشایی شامل عبارت‌های غیرخطی به صورت زیر نوشته شده‌اند [۱۴]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{\varphi 0} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} w + \frac{1}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - v_0 \right)^2 \right] \\ \gamma_{x\varphi 0} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0 \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - v_0 \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

با جایگذاری کرنش‌های غشایی از رابطه (۲۳) در رابطه (۲۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta U^i &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\sigma_x^i \delta \varepsilon_{x0} + \sigma_\varphi^i \delta \varepsilon_{\varphi 0} + \sigma_{x\varphi}^i \delta \gamma_{x\varphi 0} \right] R dx d\varphi dz \\ &= \iint_A N_x^i \left(\delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) R dx d\varphi \\ &\quad + \iint_A N_\varphi^i \left(\delta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right) + \delta \left(\frac{1}{R} w_0 \right) + \left[\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right) + w_0 \delta w_0 \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \delta w_0 + w_0 \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \right] - \left[v_0 \delta v_0 - \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \delta v_0 - v_0 \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \right] \right) R dx d\varphi \\ &\quad + \iint_A N_{x\varphi}^i \left(\delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \delta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \delta w_0 + w_0 \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \right] - \left[\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta v_0 - v_0 \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \right) R dx d\varphi \end{aligned} \quad (24)$$

که در رابطه (۲۴) نیروهای منتهجه از تنش‌های اولیه محوری N_x^i ، محیطی N_φ^i و پیچشی $N_{x\varphi}^i$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$(N_x^i, N_\varphi^i, N_{x\varphi}^i) = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_x^i, \sigma_\varphi^i, \sigma_{x\varphi}^i) dz$$

فرض شده است N_x^i ، N_φ^i و $N_{x\varphi}^i$ در تمام نقاط پوسته یکسان باشند. با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} &\iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\varphi z} \delta \gamma_{\varphi z} dA dz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\varphi z} \left[(\beta_{\varphi 0} + z \chi_{\varphi z 0} + z^2 \beta_{\varphi 0}^* + z^3 \chi_{\varphi z 0}^*) (1 + \gamma_0 z/R)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + (\beta_{\varphi 1} + z \chi_{\varphi z 1} + z^2 \beta_{\varphi 1}^*) \right] dA dz \\ &= \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\varphi z} \left[\begin{aligned} &\delta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} v_0 \right) \\ &+ z \delta \left(C_1 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_z}{\partial \varphi} - \gamma_0 \frac{1}{R^2} v_0 - \frac{1}{R} \theta_\varphi \right) \\ &+ z^2 \delta \left(C_1 \frac{1}{R} \frac{\partial w_0^*}{\partial \varphi} - C_3 \frac{1}{R} v_0^* \right) \\ &+ z^3 \delta \left(C_2 \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_z^*}{\partial \varphi} - C_4 \frac{1}{R} \theta_\varphi^* \right) \end{aligned} \right] (1 + \gamma_0 z/R)^{-1} dA dz \\ &\quad + \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} \left[\delta \left(\gamma_0 \frac{1}{R} v_0 + \theta_\varphi \right) + z \delta (2C_3 v_0^* + z^2 \delta (3C_4 \theta_\varphi^*)) \right] dA dz \\ &= - \iint_A \left[\begin{aligned} &\frac{1}{R} \frac{\partial Q_z}{\partial \varphi} \delta w_0 + C_1 \frac{1}{R} \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} \delta \theta_z + C_1 \frac{1}{R} \frac{\partial Q_z^*}{\partial \varphi} \delta w_0^* + C_2 \frac{1}{R} \frac{\partial S_\varphi^*}{\partial \varphi} \delta \theta_z^* + \\ &\frac{1}{R} Q_z \delta v_0 + \frac{\gamma_0}{R^2} S_\varphi \delta v_0 + \frac{1}{R} S_\varphi \delta \theta_\varphi + C_3 \frac{1}{R} Q_z^* \delta v_0^* + C_4 \frac{1}{R} S_\varphi^* \delta \theta_\varphi^* \\ &- \frac{\gamma_0}{R} R_\varphi \delta v_0 - R_\varphi \delta \theta_\varphi - 2C_3 T_\varphi \delta v_0^* - 3C_4 R_\varphi^* \delta \theta_\varphi^* \end{aligned} \right] dA \end{aligned} \quad (21)$$

در بسیاری از کاربردهای عملی، پوسته‌های کامپوزیتی تحت بارهای استاتیکی قرار می‌گیرند. این امر سبب ایجاد میدان تنش اولیه در پوسته می‌شود. از جمله این کاربردها، مواردی هستند که در آنها تنش‌ها یکنواخت هستند (یعنی تابعی از x و φ نیستند). این حالت می‌تواند در مواردی از قبیل پوسته‌های انتقال دهنده بار محوری یا برشی، مخازن تحت فشار و یا پوسته‌های چرخان حول محور خود، رخ دهد. لذا علاوه بر آنچه در روابط (۱۳) تا (۲۱) ذکر شد، لازم است به منظور در نظر گرفتن تنش‌های اولیه در معادلات حاکم، تغییرات انرژی کرنشی نظیر تنش‌های اولیه δU^i نیز به تغییرات انرژی کرنشی پوسته، δU در رابطه (۲)، اضافه شود. به این منظور، ابتدا رابطه تغییرات انرژی نظیر تنش‌های اولیه به صورت زیر نوشته شده است [۱۳]:

$$\delta U^i = \delta \iint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\sigma_x^i \varepsilon_{x0} + \sigma_\varphi^i \varepsilon_{\varphi 0} + \sigma_{x\varphi}^i \gamma_{x\varphi 0} \right] R dx d\varphi dz \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲)، σ_x^i ، σ_φ^i و $\sigma_{x\varphi}^i$ عبارت‌اند از تنش‌های اولیه غشایی به ترتیب محوری، محیطی و پیچشی فرض می‌شود. پوسته تحت این میدان تنش‌های اولیه، در تعادل استاتیکی قرار دارد. انرژی پتانسیل ذخیره شده در پوسته تحت تنش‌های اولیه، به عنوان سطح مرجع انرژی در تحلیل دینامیکی پوسته محسوب می‌شود. به دلیل اینکه پوسته ممکن است تحت تنش‌های اولیه بالا قرار گیرد، لازم است علاوه بر عبارات خطی کرنش سطح میانی، عبارت‌های غیرخطی مرتبه دوم کرنش که متضمن تغییر شکل‌های بزرگ غشایی در پوسته هستند نیز در عبارت‌های کرنش در رابطه (۲۲) لحاظ شوند. این امر سبب می‌شود، عبارت‌های زیر انتگرال در رابطه (۲۲) از همگنی مناسبی از نظر مرتبه بزرگی، در مقایسه با

پوسته‌های جدار ضخیم است، لزومی ندارد که تغییرات انرژی کرنشی δU^S به تغییرات انرژی کرنشی δU افزوده شود. لذا به منظور تفکیک دو حالت جدار نازک و جدار ضخیم، باید ضریب $(1-\gamma_0)$ در طرف راست رابطه (۲۷) ضرب شود. با ضرب این ضریب در طرف راست رابطه (۲۷)، پس از انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\delta U^S = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} \delta v_0 - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} \delta u_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} \delta v_0 \right) (1-\gamma_0) R dx d\varphi$$

$$- \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2R} \frac{\partial M_{\varphi x}^*}{\partial x} \delta v_0^* - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial M_{\varphi x}^*}{\partial \varphi} \delta u_0^* + \frac{1}{2} \frac{\partial N_{\varphi x}^*}{\partial x} \delta v_0^* \right) C_3 (1-\gamma_0) R dx d\varphi \quad (29)$$

۴.۲ استخراج معادلات حاکم و معادلات شرایط مرزی

پس از محاسبه عبارات‌های مربوط به کار و انرژی در تابعی اصل همیلتون، رابطه (۶)، امکان استخراج معادلات تعادل پوسته فراهم می‌آید. بدین نحو که بر مبنای قضیه اساسی حساب تغییرات^۸ مجموع کل ضرایب عبارات‌های δu_0 ، δv_0 ، δw_0 ، $\delta \theta_x$ ، $\delta \theta_\varphi$ ، $\delta \theta_z$ ، δu_0^* ، δv_0^* ، δw_0^* ، $\delta \theta_x^*$ ، $\delta \theta_\varphi^*$ و $\delta \theta_z^*$ در عبارات زیر انتگرال‌های دوگانه در روابط (۸)، (۱۰)، (۱۳) تا (۱۹)، (۲۵) و (۲۹)، بایستی برابر صفر قرار داده شوند. با انجام این کار، پس از مرتب‌سازی، معادلات تعادل به صورت زیر به دست آمده‌اند:

معادله اول، ضرایب δu_0 :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + (1-\gamma_0) \left(-\frac{1}{2R^2} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2R} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2R} \frac{\partial N_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} \right) + N_x^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} N_\varphi^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \bar{I}_0 + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \bar{I}_1 + C_3 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_2 + C_4 \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 \quad (30)$$

معادله دوم، ضرایب δv_0 :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} + \frac{1}{R} Q_\varphi + \gamma_0 \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial M_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} S_\varphi - \frac{1}{R} R_\varphi \right) + (1-\gamma_0) \left(\frac{1}{2R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{\varphi \varphi}}{\partial x} \right) + N_\varphi^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} N_\varphi^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R^2} N_\varphi^* \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} (\bar{I}_0 + \frac{2\gamma_0}{R} \bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R^2} \bar{I}_2) + \frac{\partial^2 \theta_\varphi}{\partial t^2} (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2) + C_3 \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial t^2} (\bar{I}_2 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_3) + C_4 \frac{\partial^2 \theta_\varphi^*}{\partial t^2} (\bar{I}_3 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_4) \quad (31)$$

معادله سوم، ضرایب δw_0 :

$$\delta U^i = \iiint_A \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\sigma_x^i \delta \varepsilon_{x0} + \sigma_\varphi^i \delta \varepsilon_{\varphi 0} + \sigma_{x\varphi}^i \delta \gamma_{\varphi 0} \right] R dx d\varphi dz$$

$$= - \iiint_A \left(N_x^i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \delta u_0 + (N_x^i \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}) \delta v_0 + (N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}) \delta w_0 \right) R dx d\varphi$$

$$- \iiint_A \left(- (N_\varphi^i \frac{1}{R}) \delta w_0 + (N_\varphi^i \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2}) \delta u_0 + (N_\varphi^i \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2}) \delta v_0 \right) R dx d\varphi$$

$$- \iiint_A \left(- (N_\varphi^i \frac{1}{R^2} w_0) \delta w_0 - (N_\varphi^i \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi}) \delta v_0 + (N_\varphi^i \frac{2}{R^2} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi}) \delta w_0 \right) R dx d\varphi \quad (25)$$

$$- \iiint_A \left((N_{x\varphi}^i \frac{2}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \delta u_0 + (N_{x\varphi}^i \frac{2}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} \delta v_0 - (N_{x\varphi}^i \frac{2}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_0) \right) R dx d\varphi$$

$$- \iiint_A \left((N_{x\varphi}^i \frac{2}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_0 + (N_{x\varphi}^i \frac{2}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_0) \right) R dx d\varphi$$

معمولاً فرض می‌شود تنش‌های اولیه دارای طبیعت غشایی باشند، یعنی به صورت تنش‌های ثابت و یکنواخت در راستای ضخامت در نظر گرفته می‌شوند. لذا در عبارات‌های زیر انتگرال در رابطه (۲۵)، کافی است فقط عبارات‌های خطی که تغییرات انحناء را به مؤلفه‌های جابجایی مرتبط می‌سازند، در معادلات باقی بمانند [۱۳].

برای جلوگیری از ناسازگاری ۸ ناشی از چرخش جسم صلب و ایجاد تعادل گشتاورها حول محور قائم بر المان دیفرانسیلی $R dx d\varphi$ از سطح پوسته نازک با دو انحناء، لازم است رابطه زیر نیز علاوه بر سایر معادلات تعادل، در محاسبات مد نظر قرار گیرد [۱۲ و ۱۴]:

$$\frac{M_{\varphi x}}{R_y} - \frac{M_{x\varphi}}{R_x} + N_{\varphi x} - N_{x\varphi} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{M_{\varphi x}^*}{R_y} - \frac{M_{x\varphi}^*}{R_x} + N_{\varphi x}^* - N_{x\varphi}^* = 0$$

که در حالت خاص پوسته استوانه‌ای $R_x = \infty$ و $R_y = R$ می‌باشد. لذا طبق تئوری پوسته جدار نازک ساندروز، به منظور جلوگیری از ناسازگاری ناشی از چرخش جسم صلب، باید تغییرات انرژی کرنشی δU^S به تغییرات انرژی کرنشی δU در رابطه (۲) افزوده شوند:

$$\delta U^S = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{M_{\varphi x}}{R} + N_{\varphi x} - N_{x\varphi} \right) \delta \phi_n + \left(\frac{M_{\varphi x}^*}{R} + N_{\varphi x}^* - N_{x\varphi}^* \right) \delta \phi_n^* \right] R dx d\varphi \quad (27)$$

که در رابطه (۲۷)، ϕ_n و ϕ_n^* عبارت‌اند از:

$$\phi_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right), \quad \phi_n^* = C_3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0^*}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_0^*}{\partial \varphi} \right) \quad (28)$$

کاربرد تئوری ساندروز در تحلیل پوسته‌های جدار نازک است، یعنی حالت $\gamma_0 = 0$ ، بنابراین در حالت $\gamma_0 = 1$ که مربوط به تحلیل

۵.۲ استخراج عملگرهای دیفرانسیلی

به منظور حل معادلات تعادل، ابتدا باید از روابط کرنش-جابجایی تعریف شده در روابط (۱۴)، مقادیر کرنش را در رابطه منتجه‌های تنش، جایگذاری کرد. سپس روابط حاصل شده را در معادلات تعادل پوسته، یعنی روابط (۲۸) تا (۳۹)، جایگذاری نمود. پس از جداسازی مشتقات مربوط به هریک از مؤلفه‌های جابجایی و مرتب‌سازی، عملگرهای دیفرانسیلی به دست آمده‌اند.

در این بخش، به منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد به همراه شکل مودهای متناظر، به حل معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای، که در بخش قبل به دست آمد، پرداخته شده است.

بر اساس اطلاع نگارنده، تاکنون در بین تحقیقات انجام شده، تحلیل ارتعاشات آزاد که بر مبنای تئوری مرتبه بالای پوسته بخش قبل، در این بخش انجام پذیرفته است، مشاهده نشده‌اند.

۶.۲ تحلیل ارتعاشات آزاد

به منظور حل معادلات تعادل، ابتدا لازم است با توجه به شرایط مرزی مفروض (دو سر ساده)، توابع مناسب برای مؤلفه‌های جابجایی پوسته استوانه‌ای اختیار شوند. این توابع باید شرایط مرزی هندسی و نیرویی پوسته را ارضاء کنند. شرایط مرزی دو سر ساده به صورت زیر تعریف شده‌اند [۱۵]:

$$\begin{aligned} v_0 = w_0 = \theta_\phi = \theta_z = v_0^* = w_0^* = \theta_\phi^* = \theta_z^* = 0 \\ N_x = M_x = N_x^* = M_x^* = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

به منظور ارضای شرایط مرزی ذکر شده در رابطه (۵۳)، مؤلفه‌های جابجایی پوسته استوانه‌ای به صورت حاصل ضرب توابع مثلثاتی در مختصات تعمیم یافته ۱۲ $T_{mn}(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند [۱۶]:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{0mn} \cos \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) & u_0^* &= u_{0mn}^* \cos \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) \\ v_0 &= v_{0mn} \sin \lambda x \sin n\phi T_{mn}(t) & v_0^* &= v_{0mn}^* \sin \lambda x \sin n\phi T_{mn}(t) \\ w_0 &= w_{0mn} \sin \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) & w_0^* &= w_{0mn}^* \sin \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) \\ \theta_x &= \theta_{xmn} \cos \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) & \theta_x^* &= \theta_{xmn}^* \cos \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) \\ \theta_\phi &= \theta_{\phi mn} \sin \lambda x \sin n\phi T_{mn}(t) & \theta_\phi^* &= \theta_{\phi mn}^* \sin \lambda x \sin n\phi T_{mn}(t) \\ \theta_z &= \theta_{zmn} \sin \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) & \theta_z^* &= \theta_{zmn}^* \sin \lambda x \cos n\phi T_{mn}(t) \end{aligned} \quad (54)$$

که در روابط (۵۴)، $\lambda = m\pi/L$. همچنین در تحلیل ارتعاشات آزاد $T_{mn}(t) = e^{i\omega_{mn}t}$ در نظر گرفته شده است که ω_{mn} فرکانس طبیعی (بر حسب rad/sec) مربوط به مود شماره (m,n) که m عبارت است از شماره نیم موج طولی و n شماره موج محیطی است. همچنین u_{0mn}^* ، θ_{zmn}^* ، $\theta_{\phi mn}^*$ ، θ_{xmn}^* ، w_{0mn}^* ، v_{0mn}^* ، u_{0mn} ، v_{0mn} ، w_{0mn} ، θ_{zmn} ، $\theta_{\phi mn}$ ، θ_{xmn} ، w_{0mn} ، v_{0mn} ، u_{0mn} ، θ_{zmn}^* و $\theta_{\phi mn}^*$ ثوابت شکل مودهای طبیعی هستند. پس از جایگذاری مؤلفه‌های جابجایی پوسته استوانه‌ای از روابط (۵۴) در معادلات تعادل (۲۸) تا (۳۹)، به ازای هر یک از مقادیر m و n یک دستگاه معادلات به صورت زیر حاصل شده است:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \\ L_{41} \\ L_{51} \\ L_{61} \\ L_{71} \\ L_{81} \\ L_{91} \\ L_{101} \\ L_{111} \\ L_{121} \end{matrix} \begin{matrix} L_{12} \\ L_{22} \\ L_{32} \\ L_{42} \\ L_{52} \\ L_{62} \\ L_{72} \\ L_{82} \\ L_{92} \\ L_{102} \\ L_{112} \\ L_{122} \end{matrix} \begin{matrix} L_{13} \\ L_{23} \\ L_{33} \\ L_{43} \\ L_{53} \\ L_{63} \\ L_{73} \\ L_{83} \\ L_{93} \\ L_{103} \\ L_{113} \\ L_{123} \end{matrix} \begin{matrix} L_{14} \\ L_{24} \\ L_{34} \\ L_{44} \\ L_{54} \\ L_{64} \\ L_{74} \\ L_{84} \\ L_{94} \\ L_{104} \\ L_{114} \\ L_{124} \end{matrix} \begin{matrix} L_{15} \\ L_{25} \\ L_{35} \\ L_{45} \\ L_{55} \\ L_{65} \\ L_{75} \\ L_{85} \\ L_{95} \\ L_{105} \\ L_{115} \\ L_{125} \end{matrix} \begin{matrix} L_{16} \\ L_{26} \\ L_{36} \\ L_{46} \\ L_{56} \\ L_{66} \\ L_{76} \\ L_{86} \\ L_{96} \\ L_{106} \\ L_{116} \\ L_{126} \end{matrix} \begin{matrix} L_{17} \\ L_{27} \\ L_{37} \\ L_{47} \\ L_{57} \\ L_{67} \\ L_{77} \\ L_{87} \\ L_{97} \\ L_{107} \\ L_{117} \\ L_{127} \end{matrix} \begin{matrix} L_{18} \\ L_{28} \\ L_{38} \\ L_{48} \\ L_{58} \\ L_{68} \\ L_{78} \\ L_{88} \\ L_{98} \\ L_{108} \\ L_{118} \\ L_{128} \end{matrix} \begin{matrix} L_{19} \\ L_{29} \\ L_{39} \\ L_{49} \\ L_{59} \\ L_{69} \\ L_{79} \\ L_{89} \\ L_{99} \\ L_{109} \\ L_{119} \\ L_{129} \end{matrix} \begin{matrix} L_{110} \\ L_{210} \\ L_{310} \\ L_{410} \\ L_{510} \\ L_{610} \\ L_{710} \\ L_{810} \\ L_{910} \\ L_{1010} \\ L_{1110} \\ L_{1210} \end{matrix} \begin{matrix} L_{111} \\ L_{211} \\ L_{311} \\ L_{411} \\ L_{511} \\ L_{611} \\ L_{711} \\ L_{811} \\ L_{911} \\ L_{1011} \\ L_{1111} \\ L_{1211} \end{matrix} \begin{matrix} L_{112} \\ L_{212} \\ L_{312} \\ L_{412} \\ L_{512} \\ L_{612} \\ L_{712} \\ L_{812} \\ L_{912} \\ L_{1012} \\ L_{1112} \\ L_{1212} \end{matrix} \begin{matrix} u_{0mn} \cos \lambda x \cos n\phi \\ v_{0mn} \sin \lambda x \sin n\phi \\ w_{0mn} \sin \lambda x \cos n\phi \\ q_{xmn} \cos \lambda x \cos n\phi \\ q_{f mn} \sin \lambda x \sin n\phi \\ q_{zmn} \sin \lambda x \cos n\phi \\ u_{0mn}^* \cos \lambda x \cos n\phi \\ v_{0mn}^* \sin \lambda x \sin n\phi \\ w_{0mn}^* \sin \lambda x \cos n\phi \\ q_{xmn}^* \cos \lambda x \cos n\phi \\ q_{f mn}^* \sin \lambda x \sin n\phi \\ q_{zmn}^* \sin \lambda x \cos n\phi \end{matrix} T_{mn}(t) = \{0\} \quad (55)$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} ([L_{ij}] \{\Delta\} T_{mn}(t)) \{\Psi\} dx d\phi = 0 \quad (56)$$

که در رابطه (۵۶) $\{\Delta\}$ بردار شکل مودهای طبیعی و $\{\Psi\}$ بردار توابع وزنی ۱۲ هستند و به صورت زیر تعریف شده‌اند:

که در رابطه (۵۵) L_{ij} ها عملگرهای دیفرانسیلی هستند. برای حل این دستگاه معادلات، از روش گالرکین به صورت زیر استفاده شده است [۹۳-۹۲]:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_{0mn} \cos \lambda x \cos n\phi \\ v_{0mn} \sin \lambda x \sin n\phi \\ w_{0mn} \sin \lambda x \cos n\phi \\ \theta_{xmn} \cos \lambda x \cos n\phi \\ \theta_{\phi mn} \sin \lambda x \sin n\phi \\ \theta_{zmn} \sin \lambda x \cos n\phi \\ u_{0mn}^* \cos \lambda x \cos n\phi \\ v_{0mn}^* \sin \lambda x \sin n\phi \\ w_{0mn}^* \sin \lambda x \cos n\phi \\ \theta_{xmn}^* \cos \lambda x \cos n\phi \\ \theta_{\phi mn}^* \sin \lambda x \sin n\phi \\ \theta_{zmn}^* \sin \lambda x \cos n\phi \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \cos \lambda x \cos n\phi \\ \sin \lambda x \sin n\phi \\ \sin \lambda x \cos n\phi \\ \cos \lambda x \cos n\phi \\ \sin \lambda x \sin n\phi \\ \sin \lambda x \cos n\phi \\ \cos \lambda x \cos n\phi \\ \sin \lambda x \sin n\phi \\ \sin \lambda x \cos n\phi \\ \cos \lambda x \cos n\phi \\ \sin \lambda x \sin n\phi \\ \sin \lambda x \cos n\phi \end{Bmatrix} \quad (57)$$

۳ تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای

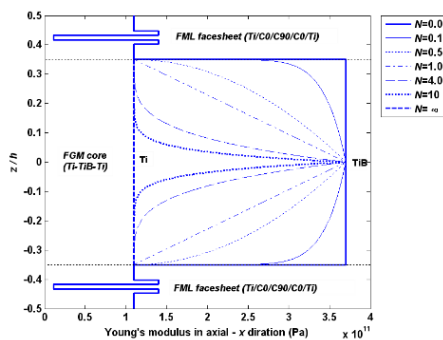
FGM با FML/Core/FML

در این بخش، به تحلیل فرکانسی پوسته استوانه‌ای ساندویچی FML/Core/FML با رویه‌های بالا و پایین از جنس FML دما بالا با لایه چینی متقارن Ti/C 2/1 [0/90/0] و هسته از جنس P-FGM با ساختار متقارن تیتانیوم-تیتانیوم بوراید-تیتانیوم (Ti-TiB-Ti) پرداخته شده است. خواص مواد تشکیل دهنده P-FGM به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۸]:

فلز تیتانیوم (Ti) (۶۲)
 $E_2 = 110 \text{ GPa}, \nu_2 = 0.24, \rho_2 = 4512 \text{ kg/m}^3$

سرامیک تیتانیوم بوراید (TiB) (۶۳)
 $E_1 = 370 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.14, \rho_1 = 4630 \text{ kg/m}^3$

توزیع خواص ماده در هسته P-FGM طبق قانون توزیع توانی و به صورت متقارن حول سطح میانی پوسته در نظر گرفته شده است. به طور مثال، توزیع مدول یانگ در جهت محوری و در امتداد ضخامت پوسته استوانه‌ای به ازای مقادیر مختلف نمای قانون توانی (N) مطابق شکل ۱ است.



شکل ۱- توزیع مدول یانگ در جهت محوری و در امتداد ضخامت پوسته استوانه‌ای ساندویچی به ازای مقادیر مختلف نمای قانون توانی (N): ساختار ساندویچی FML/Core/FML با رویه‌های [0/90/0] 2/1 Ti/C و هسته P-FGM با ساختار متقارن Ti-TiB-Ti.

با انجام انتگرال‌گیری ذکر شده در رابطه (۵۶) و دسته‌بندی ضرایب، معادله مقدار ویژه زیر حاصل شده است:

$$[\mathbf{K} - \beta_{mn} \mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} = \{0\} \quad (58)$$

که در رابطه (۵۸) $\beta_{mn} = \omega_{mn}^2$ و بردار ثوابت شکل مود است و به صورت زیر تعریف شده است:

$$\{\mathbf{d}\} = \{u_{0mn} \ v_{0mn} \ w_{0mn} \ \theta_{xmn} \ \theta_{\phi mn} \ \theta_{zmn} \ u_{0mn}^* \ v_{0mn}^* \ w_{0mn}^* \ \theta_{xmn}^* \ \theta_{\phi mn}^* \ \theta_{zmn}^*\}^T \quad (59)$$

معادله مقدار ویژه (۵۸) برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر با آنها حل شده است. کوچکترین مقدار ویژه عبارت است از مجذور فرکانس پایه (کوچکترین فرکانس طبیعی پوسته یا ω_f). برای حل معادله مقدار ویژه (۵۸) از نرم‌افزار MATLAB 7.3 استفاده شده است.

۷.۲ نرمالیزه کردن شکل مودها

از خواص مهم مودهای ارتعاشی پوسته استوانه‌ای، تعامد آنها نسبت به ماتریس‌های جرم و سفتی است. تعامد شکل مودهای پوسته نسبت به ماتریس جرم، بصورت زیر بیان شده است [۱۷]:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \Delta_{mn}^T \mathbf{M} \Delta_{ij} dx d\phi = \begin{cases} = 0 & \text{if } m \neq i \text{ or } n \neq j \\ \neq 0 & \text{if } m = i \text{ and } n = j \end{cases} \quad (60)$$

که در آن Δ_{mn} همان بردار شکل مودهای طبیعی تعریف شده در رابطه (۵۸) است. سپس شکل مودهای نرمالیزه نسبت به ماتریس جرم به شیوه زیر محاسبه شده‌اند:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \Delta_{mn}^T \mathbf{M} \Delta_{mn} dx d\phi = 1 \quad (61)$$

و در نتیجه بردار شکل مودهای طبیعی نرمالیزه شده، به ازای هر یک از مقادیر m و n به دست آمده است.

(Sigmoid) و یا تابع نمایی (Exponential) استفاده کرده‌اند [۲۰].

در پژوهش حاضر از مدل‌های تابع توانی (P-FGM) استفاده شده است. روابط توصیف کننده این توابع، در ادامه آورده شده‌اند [۲۰].

مدل تابع توانی (P-FGM):

تغییرات کسر حجمی ماده در این مدل به صورت زیر است:

$$V_f(z) = \left(\frac{z + h/2}{h}\right)^N \quad (۶۴)$$

که در رابطه (۶۴) z مختصه مکانی در راستای ضخامت FGM، h ضخامت FGM و N نمای قانون توانی (Power-law exponent) است. با این تعریف، تغییرات خاصیت ماده ایزوتروپیک P (اعم از مدول یانگ E ، چگالی ρ و ضریب پواسون ν) در راستای ضخامت، بر طبق مدل تابع توانی (P-FGM)، به صورت زیر در می‌آید:

$$P(z) = V_f(z)P_1 + (1 - V_f(z))P_2 \quad (۶۵)$$

که در رابطه (۶۵)، P_1 خاصیت ماده در سطح بیرونی $z = h/2$ و P_2 خاصیت ماده در سطح داخلی $z = -h/2$ است.

برای مدل‌سازی پوسته ساندویچی در نرم‌افزار ABAQUS، از المان پوسته S8R استفاده شده است. به منظور مدل‌سازی هسته FGM، ضخامت هسته به تعداد کافی زیرلایه‌های (sub-layers) ایزوتروپیک همگن تقسیم شده، خواص ماده مربوط به هر زیرلایه، طبق روابط (۶۵) محاسبه شده است. سپس فهرست خواص ماده مربوط به همه زیرلایه‌ها، با ایجاد تغییر در فایل ورودی نرم‌افزار با پسوند (*.inp)، وارد کتابخانه مواد مدل المان محدود پوسته شده‌اند. آنگاه با فراخوانی هر یک از خواص ماده از کتابخانه مواد و اختصاص دادن این خواص به زیرلایه متناظر، توزیع خواص ماده در امتداد ضخامت هسته FGM مدل‌سازی شده است. در هر مورد، مطالعه همگرایی نتایج بر حسب تعداد زیرلایه‌ها صورت پذیرفته، از کافی بودن تعداد زیرلایه‌ها برای مدل‌سازی هسته FGM اطمینان حاصل شده است. به عنوان مثال، برای رسیدن به همگرایی جواب، به ازای نسبت $h/R=0.2$ ، ضخامت هسته FGM به تعداد ۲۵۰ زیرلایه با ضخامت‌های مساوی تقسیم‌بندی شده است.

۴ نتایج

همانطور که در شکل ۲ قابل مشاهده است، باز هم نتایج تئوری $RHOST\ \square\ \square\ c$ در مقایسه با نتایج تئوری $RHOST\ \square\ Ac$ به نتایج حلگر ABAQUS/Standard نزدیک‌تر است. در پوسته FML به دلیل اینکه خواص ماده در لایه‌های بالا و پایین، ایزوتروپیک و در لایه‌های میانی، اورتوتروپیک است، اثر عبارت‌های مرتبه بالاتر (z ، z^2 و z^3) در مؤلفه جابجایی عرضی (w) در مقایسه با اثر عبارت‌های مرتبه بالاتر (z^2 و z^3) در

کسر حجمی هسته FGM در ساختار ساندویچی FML/Core/FML به صورت نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پوسته یا h_{core}/h تعریف شده است و برابر 0.7 در نظر گرفته شده است. کسر حجمی (Metal Volume Fraction یا MVF) فلز تیتانیوم (Ti) در ساختار FML به کار رفته در رویه‌ها نیز برابر 0.7 و در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل ۲ نمایش داده شده است، کوچکترین فرکانس طبیعی پوسته‌های ساندویچی FML/Core/FML با ساختار مورد بررسی در شکل ۱، با استفاده از تئوری‌های معرفی شده در جدول ۱ محاسبه شده، با مقادیر به دست آمده به کمک نرم‌افزار ABAQUS مقایسه شده‌اند.

جدول ۱- برخی از انواع مختلف تئوری‌های پوسته با تغییر ضرایب $C1$ تا $C4$

ردیف	نام تئوری	ضرایب تعیین کننده نوع تئوری			
		$C1$	$C2$	$C3$	$C4$
۱	RHOST*5c	۰	۰	۰	۰
۲	RHOST7Ac	۰	۰	۰	۱
۳	RHOST9Ac	۰	۰	۱	۱
۴	RHOST7Bc	۱	۰	۰	۰
۵	RHOST9Bc	۱	۰	۰	۱
۶	RHOST11c	۱	۰	۱	۱
۷	RHOST8c	۱	۱	۰	۰
۸	RHOST10c	۱	۱	۰	۱
۹	RHOST12c	۱	۱	۱	۱

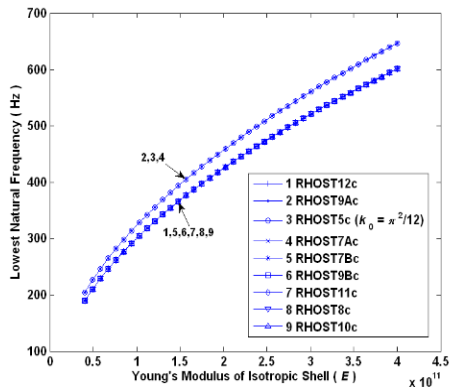
*: Refined Higher-Order Shear deformation Theory

با توجه به در نظر گرفتن اثر شکل دوزنقه‌ای مقطع پوسته ($\gamma_0 = 1$)، حرف R مخفف Refined به ابتدای نام هر تئوری در جدول ۱ افزوده شده است. همچنین برای محاسبه انتگرال منته‌های تنش در رابطه (۱۲) کسر شامل عبارت $(1 + \gamma_0 z/R)$ را می‌توان به صورت سری بسط داد و سپس با در نظر گرفتن همه جملات در سری، انتگرال مربوطه را به صورت دقیق محاسبه نمود. در جدول ۱، منظور از حرف c (مخفف Complete) در انتهای نام هر تئوری، به معنی در نظر گرفتن همه جملات در سری معادل کسر شامل عبارت $(1 + \gamma_0 z/R)$ برای محاسبه انتگرال منته‌های تنش در رابطه (۱۲) به صورت کامل و دقیق است.

۳.۱ مدل‌های تغییرات تدریجی خواص ماده در FGM

خواص مکانیکی در FGM بصورت هموار و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کند. برخی محققین از مدل موری-تاناکا (Mori-Tanaka) برای تعیین تغییرات تدریجی خواص ماده در امتداد ضخامت استفاده کرده‌اند [۱۹]. بسیاری از محققین از مدل‌های تابع توانی (Power-law)، تابع هلالی یا S مانند

همانطور که در شکل ۳ مشخص است، با افزایش h_{core}/h درصد تفاوت فرکانس حاصل از تئوری RHOST9Ac در مقایسه با تئوری RHOST12c (تئوری دقیق‌تر) افزایش یافته است. این درصد تفاوت به ازای $h_{core}/h=0$ ۹۸٪ و به ازای $h_{core}/h=1$ ۴۱٪ است. همچنین، همانطور که در شکل مشخص شده است، تئوری RHOST9Ac در پیش‌گویی شماره مود ارتعاشی پوسته نیز دچار خطا شده است.



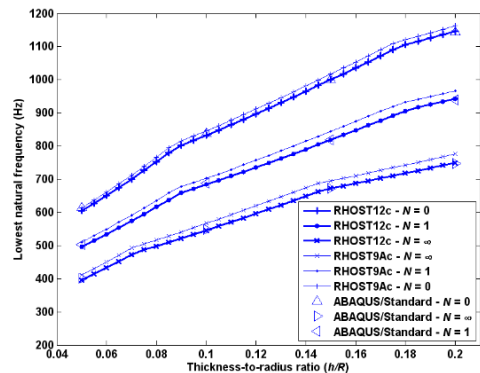
شکل ۴- کوچکترین فرکانس پوسته ایزوتروپیک بر حسب مدول یانگ پوسته (E) به ازای تئوری‌های ذکر شده در جدول ۱؛ خواص ماده ایزوتروپیک $\nu=0.3$ ، $\rho=7900 \text{ kg/m}^3$ ، $L/R=1$ ، $h/R=0.5$ ، شماره مود $(m,n)=(1,4)$.

به منظور مقایسه نتایج تئوری‌های پوسته مورد نظر در جدول ۱، نتایج فرکانس پایه (کوچکترین فرکانس طبیعی) در حالت خاص پوسته استوانه‌ای ضخیم از جنس ایزوتروپیک همگن، در شکل ۴ با هم مقایسه شده‌اند. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، نتایج سه تئوری RHOST5c، RHOST7Ac و RHOST9Ac بسیار به یکدیگر نزدیک هستند. همچنین نتایج سایر تئوری‌ها از جمله تئوری RHOST12c نیز بسیار به یکدیگر نزدیک هستند. در واقع، تفاوت اصلی بین سه تئوری RHOST5c، RHOST7Ac و RHOST9Ac با سایر تئوری‌ها، در به حساب آوردن انعطاف-پذیری عرضی (تغییر ضخامت) پوسته ایزوتروپیک است. بنابراین، با توجه به دقت بالای تئوری RHOST12c، می‌توان به تأثیر قابل توجه عبارت‌های مرتبه بالاتر Z_1 ، Z_2^2 و Z_3^3 در مؤلفه جابجایی نرمال w (رابطه ۸) بر فرکانس طبیعی پوسته پی برد. درصد اختلاف بین نتایج تئوری RHOST9Ac که در آن از انعطاف‌پذیری عرضی صرف نظر شده، با نتایج تئوری دقیق‌تر یعنی RHOST12c، به ازای مقادیر مختلف مدول یانگ (E)، بین ۷٪ تا ۷۹٪ است.

۵ اعتبارسنجی نتایج

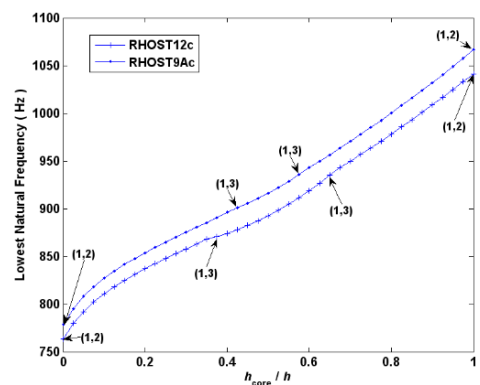
در این بخش، نتایج عددی به دست آمده از تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای ماده ایزوتروپیک همگن، اعتبارسنجی شده است.

مؤلفه‌های جابجایی صفحه‌ای (u و v) در پیش‌گویی فرکانس، غالب می‌شود. این امر سبب ایجاد اختلاف قابل توجه بین جواب‌های دو تئوری RHOST□□c و RHOST□Ac می‌شود. در حالی که در پوسته ساندویچی FML/Core/FML با هسته FGM، چون خواص ماده در در رویه‌های بالا و پایین، ارتوتروپیک و در هسته میانی (FGM)، ایزوتروپیک است، نقش عبارت‌های مرتبه بالاتر (Z_1 و Z_2) در مؤلفه‌های جابجایی صفحه‌ای (u و v) در مقایسه با عبارت‌های مرتبه بالاتر (Z_1 ، Z_2 و Z_3) در مؤلفه جابجایی عرضی (w) اهمیت پیدا می‌کند.



شکل ۵- کوچکترین فرکانس طبیعی بر حسب نسبت ضخامت به شعاع پوسته استوانه‌ای ساندویچی به ازای مقادیر مختلف نمای قانون توانی (h/R)؛ ساختار ساندویچی FML/Core/FML با رویه‌های (N) ، $L/R=1$ ؛ ساختار ساندویچی P-FGM با هسته Ti/C 2/1 [0/90/0] (MVF=0.7) با ساختار متقارن Ti-TiB-Ti ($h_{core}/h=0.7$).

کوچکترین فرکانس طبیعی پوسته ساندویچی FML/Core/FML مورد بحث در شکل ۱ بر حسب کسر حجمی هسته FGM (h_{core}/h) با استفاده از دو تئوری RHOST9Ac و RHOST12c محاسبه شده، در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۶- کوچکترین فرکانس طبیعی پوسته ساندویچی

بر حسب کسر حجمی هسته FGM (h_{core}/h)، رویه‌های (N) ؛ $h/R=0.5$ ، $L/R=1$ ؛ ساختار متقارن P-FGM با ساختار متقارن Ti-TiB-Ti و با $N=1$ ؛ (اعداد داخل پرانتز نشان دهنده شماره مود هستند)

۶ نتیجه‌گیری

بر اساس نتایج و بحث‌های ذکر شده، مهم‌ترین نتایج و دستاوردهای کاربردی مبتنی بر نوآوری‌های پژوهش حاضر را می‌توان به طور مختصر در موارد زیر خلاصه کرد:

هر چه اثر عبارت‌های $(1+z/R)$ دقیق‌تر محاسبه گردد، دقت فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده بیشتر می‌شود. از این رو، تنها تئوری RHOST12c، تئوری قابل اعتماد است و برای پیش‌گویی دقیق فرکانس‌های طبیعی در تحلیل ارتعاشات آزاد استوانه‌های کوتاه/طولیل و توپ‌/توخالی کفایت می‌کند. لذا تئوری RHOST12c به عنوان دستاورد محاسباتی جدید و کاربردی پژوهش حاضر محسوب می‌شود.

تئوری HOST12 برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی متناظر با شماره مودهای بالاتر استوانه‌های ضخیم و بسیار ضخیم کفایت نمی‌کند. در حالی که قابلیت تئوری RHOST12c برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی متناظر با شماره مودهای بالاتر استوانه‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم، عالی است. همچنین تئوری RHOST12c قابلیت خوبی برای پیش‌گویی فرکانس‌های طبیعی متناظر با شماره مودهای بالاتر استوانه‌های ایزوتروپیک بسیار ضخیم دارد.

در پوسته ساندویچی FML/Core/FML با هسته FGM، چون خواص ماده در رویه‌های بالا و پایین، ارتوتروپیک و در هسته میانی (FGM)، ایزوتروپیک است، نقش عبارت‌های مرتبه بالاتر (z^2 و z^3) در مؤلفه‌های جابجایی صفحه‌ای (u و v) در مقایسه با عبارت‌های مرتبه بالاتر (z ، z^2 و z^3) در مؤلفه جابجایی عرضی (w) اهمیت پیدا می‌کند.

با افزایش h_{core}/h ، درصد تفاوت فرکانس پوسته ساندویچی FML/Core/FML با هسته FGM، حاصل از تئوری RHOST9Ac در مقایسه با تئوری RHOST12c (تئوری دقیق‌تر) افزایش یافته است. همچنین، تئوری RHOST9Ac در پیش‌گویی شماره مود ارتعاشی پوسته نیز دچار خطا شده است.

۷ مراجع

- [1] I. Sheinman and S. Greif, "Dynamic analysis of laminated shells of revolution," *Journal of composite materials*, vol. 18, no. 3, pp. 200-215, 1984, <https://doi.org/10.1177/002199838401800301>.
- [2] A. Jafari, S. Khalili, and R. Azarafza, "Transient dynamic response of composite circular cylindrical shells under radial impulse load and axial compressive loads," *Thin-Walled Structures*, vol. 43, no. 11, pp. 1763-1786, 2005, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2005.06.009>.

آرمناکاس و همکاران [۲۱] با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی دقیق، فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک توخالی (hollow) و توپ (solid) را محاسبه کردند. سولداتوس و هاجیچئورجیو [۲۲] برای حل مسأله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم و نسبتاً ضخیم، یک شیوه تکراری^۲ با استفاده از حل دقیق معادلات الاستیسیته سه بعدی توسعه دادند. جواب‌های آنها در مقایسه با حل مرجع [۲۱] تطابق خوبی داشت. آنها پارامتر فرکانسی Ω را به صورت زیر معرفی کردند:

$$\Omega = \omega L \sqrt{\rho(1+\nu)/E} \quad (۶۶)$$

که در رابطه (۶۶)، E ، ρ و ν به ترتیب مدول یانگ، چگالی و ضریب پواسون، L طول پوسته و ω فرکانس طبیعی بر حسب رادیان بر ثانیه است. در جدول ۲ نتایج پارامتر فرکانسی اول Ω حاصل از تئوری RHOST12c حاضر، با نتایج مراجع [۲۱] و [۲۲] مقایسه شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، انطباق بسیار خوبی بین نتایج حاضر با نتایج مرجع [۲۱] حاصل شده است. همانطور که در جدول (2) ملاحظه می‌شود، جواب‌های شیوه تکراری [۲۲] غالباً اندکی بزرگتر از جواب‌های الاستیسیته سه بعدی [۲۱] است در حالی که جواب‌های تئوری RHOST12c حاضر، غالباً اندکی کوچکتر از جواب‌های الاستیسیته سه بعدی [۲۱] هستند.

جدول ۲- مقایسه بین پارامتر فرکانسی اول، محاسبه شده به روش RHOST12c، حل دقیق الاستیسیته سه بعدی [۲۱] و شیوه تکراری [۲۲] برای پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک ($m=1$)
($\nu=0.3$, $L/R=0.1$)

h/R	n	پژوهش حاضر (RHOST12c)	سولداتوس و هاجیچئورجیو [۲۲]	آرمناکاس و همکاران [۲۱]
۰/۱	۱	۱/۰۶۱۴۲	۱/۰۶۲۳۸	۱/۰۶۲۲۶
	۲	۰/۸۸۱۵۸	۰/۸۸۲۶۰	۰/۸۸۲۳۳
	۳	۰/۸۰۸۶۰	۰/۸۰۹۶۳	۰/۸۰۹۲۵
	۴	۰/۸۹۸۱۹	۰/۸۹۹۰۵	۰/۸۹۸۷۷
	۵	۱/۱۲۱۵۶	۱/۱۲۲۱۶	—
۰/۲	۱	۱/۱۸۶۲۲	۱/۱۸۹۰۸	۱/۱۸۸۸۹
	۲	۱/۰۹۸۸۵	۱/۱۰۱۲۱	۱/۱۰۰۹۲
	۳	۱/۱۹۶۴۴	۱/۱۹۷۹۳	۱/۱۹۷۵۵
	۴	۱/۴۸۹۴۱	۱/۴۸۹۷۵	۱/۴۸۹۳۳
	۵	۱/۹۱۴۷۵	۱/۹۱۳۸۹	—
۰/۳	۱	۱/۳۳۳۰۹	۱/۳۳۷۶۱	۱/۳۳۷۲۷
	۲	۱/۳۲۱۰۱	۱/۳۲۲۷۱	۱/۳۲۳۲۵
	۳	۱/۵۲۷۷۹	۱/۵۲۸۰۵	۱/۵۲۷۶۴
	۴	۱/۹۲۹۴۴	۱/۹۲۹۶۵	۱/۹۲۹۶۰
	۵	۲/۴۵۱۷۷	۲/۴۴۶۲۸	—

- [8] G. H. R. E. Zarei, "Free vibration analysis of rotating grid stiffened composite cylindrical shells," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 16, no. 9, pp. 175-185, 2016, <http://dorl.net/dor/20.1001.1.10275940.1395.16.9.15.4>.
- [9] M. R. E. S. A. Mousavi, M. Kaffash-Mirzarahimi "Dynamic and vibration analysis of composite cylindrical shell with piezoelectric layers," *Aerospace Mechanics Scientific Journal*, vol. 16, no. 2, pp. 12-25, 2019.
- [10] G. Zhao *et al.*, "Vibration analysis of size dependent micro FML cylindrical shell reinforced by CNTs based on modified couple stress theory," *Arabian Journal of Chemistry*, vol. 15, no. 10, p. 104115, 2022.
- [11] A. Leissa and J.-D. Chang, "Elastic deformation of thick, laminated composite shells," *Composite structures*, vol. 35, no. 2, pp. 153-170, 1996.
- [12] J. L. Sanders, *An improved first-approximation theory for thin shells*. US Government Printing Office, 1960.
- [13] A. W. Leissa, *Vibration of shells*. Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space ..., 1973.
- [3] R. Azarafza, "Weight and dynamic optimization of multi-layer composite cylindrical shells," PhD Thesis, Khajeh Nasiruddin Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
- [4] S. Khalili, R. Azarafza, and A. Davar, "Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shells under radial impulse load," *Composite Structures*, vol. 89, no. 2, pp. 275-284, 2009, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.08.002>.
- [5] A. Davar, M. Heydari Beni, R. Azarafza, and J. Eskandari Jam, "Free vibration analysis of cylindrical sandwich shells with FML face and functionally graded core using a new shell theory," *Technology in Aerospace Engineering*, pp. 1-14, 2023.
- [6] O. Rahmani, S. Khalili, and K. Malekzadeh, "Free vibration response of composite sandwich cylindrical shell with flexible core," *Composite Structures*, vol. 92, no. 5, pp. 1269-1281, 2010, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.10.021>.
- [7] R. A. A. arjangpay, M. Darviza, "Vibration analysis of a FGM cylindrical shell using MLPG method," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 13, no. 3, pp. 93-101, 2013, <http://dorl.net/dor/20.1001.1.10275940.1392.13.3.5.1>.