



E-ISSN: 2676-4253

Journal of Technology in Aerospace Engineering

Vol. 8, No. 4, pp. 27-38, 2024

<https://doi.org/10.22034/jtae.2024.8.4.3>

Journal Homepage: <https://jtae.ari.ac.ir>



Original Research Paper

## Robust Predictive Control for Satellite Orbit Maintenance Using Hall Effect Thrusters

Masumeh Kiantaj\* , Morteza Farhid , and Moharram Shameli 

Space Thrusters Research Institute, Iranian Space Research Center, Tabriz, Iran

### ARTICLE INFO

#### Article History:

Received 28 August 2023

Revised 28 November 2023

Accepted 10 December 2023

Available Online 10 December 2023

#### Keywords:

Orbit maintenance  
Predictive  
Robust  
Hall effect thruster  
Disturbance  
Uncertainty

### ABSTRACT

In this article, a robust model predictive controller is designed for maintaining the satellite's low earth orbit in the presence of perturbations and uncertainties. The designed control system makes it possible for the satellite to automatically keep the orbital parameters within the allowed range without intervention of the ground station. For this purpose, Hall effect thrusters, which are among the electric thrusters with small size, have been used, and the output of the controller is implemented by continuously commanding these thrusters instead of the traditional impulsive thrust generation algorithms. Based on this, it is possible to modify all orbital parameters simultaneously. In the presented solution, the gain of the controller is calculated online by solving an optimization problem whose objective is to minimize the orbit maintenance error and also the fuel consumption. Also, the optimization problem based on linear matrix inequalities has been developed to ensure the stability of the closed loop system and to be  $H_\infty$  robust against orbital perturbations and unknown parametric uncertainties. Finally, numerical simulations show the effectiveness of the proposed control scheme and the high efficiency of the closed loop system despite uncertainties and perturbations.

\* Corresponding Author's E-mail: [m.kiantaj@gmail.com](mailto:m.kiantaj@gmail.com)

### How to Cite this Article:

M. Kiantaj, M. Farhid, and M. Shameli, "Robust Model Predictive Control for Satellite Orbit Maintenance Using Hall Effect Thrusters," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, Vol. 8, No. 4, pp. 27-38, 2024, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jtae.2024.8.4.3>.

### COPYRIGHTS

Authors retain the copyright and full publishing rights.

Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article licensed under the [Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).





# کنترل پیش‌بین مقاوم جهت حفظ مداری ماهواره با استفاده از رانش گرهای اثر هال

معصومه کیان‌تاج<sup>۱\*</sup>، مرتضی فرهید<sup>۲</sup>، و محرم شاملی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، پژوهشکده رانش گرهای فضایی، پژوهشگاه فضایی ایران، تبریز، ایران  
۲- استادیار، پژوهشکده رانش گرهای فضایی، پژوهشگاه فضایی ایران، تبریز، ایران

## چکیده

## اطلاعات مقاله

### تاریخچه مقاله:

دریافت ۶ شهریور ۱۴۰۲  
بازنگری ۷ آذر ۱۴۰۲  
پذیرش ۱۹ آذر ۱۴۰۲  
اولین انتشار ۱۹ آذر ۱۴۰۲

### واژه‌های کلیدی:

حفظ مداری  
کنترل  
پیش‌بین  
مقاوم  
رانش گر اثر هال  
اغتشاش  
نامعینی

در این مقاله، کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم جهت عملیات حفظ مداری ماهواره در مدار ارتفاع پایین در حضور اغتشاشات و نامعینی‌ها طراحی گردیده است. سیستم کنترل طراحی شده این امکان را ایجاد می‌کند که ماهواره به‌صورت خودکار و بدون دخالت ایستگاه زمینی، پارامترهای مداری را در محدوده مجاز نگاه دارد. برای این منظور، رانش گرهای اثر هال که در زمره رانش گرهای الکتریکی دارای اندازه کوچک محسوب می‌گردند، بکار گرفته شده و خروجی کنترل‌کننده با فرماندهی پیوسته به این رانش گرها به‌جای الگوریتم‌های تولید پیش‌رانه ضربه‌ای سنتی پیاده‌سازی شده‌است. براین اساس امکان اصلاح هم‌زمان کلیه پارامترهای مداری فراهم گردیده است. در راهکار ارائه شده، بهره کنترل‌کننده به شکل روی خط و از حل یک مسئله بهینه‌سازی که تابع هزینه آن حداقل‌سازی خطای حفظ مداری و همچنین مصرف سوخت در نظر گرفته شده، محاسبه می‌شود. همچنین مسئله بهینه‌سازی مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی جهت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته و مقاوم‌بودن  $H_\infty$  در برابر اغتشاشات مداری و نامعینی‌های پارامتری ناشناخته توسعه داده شده‌است. در انتها، شبیه‌سازی‌های عددی، اثرگذاری کنترل‌کننده پیشنهادی و کارایی بالای سیستم حلقه بسته با وجود نامعینی‌ها و اغتشاشات را نشان می‌دهد.

\* پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [m.kiantaj@gmail.com](mailto:m.kiantaj@gmail.com)

## How to Cite this Article:

M. Kiantaj, M. Farhid, and M. Shamel, "Robust Model Predictive Control for Satellite Orbit Maintenance Using Hall Effect Thrusters," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, Vol. 8, No. 4, pp. 27-38, 2024, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jtae.2024.8.4.3>.

## COPYRIGHTS

Authors retain the copyright and full publishing rights.

Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article licensed under the [Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



## ۱ مقدمه

بسیاری از مأموریت‌های فضائی از جمله مأموریت‌های نظامی، سنجش از دور، آب و هوا و ... در مدارهای با ارتفاع پایین صورت می‌گیرند. از طرفی ماهواره‌های ارتفاع پایین، تحت تاثیر نیروی اغتشاشی درگ جو قرار می‌گیرند که موجب فاصله گرفتن ماهواره از مداری می‌شود که برای آن طراحی شده‌است [۱]. به‌علاوه، با کاهش ارتفاع ماهواره، اندازه این نیرو افزایش یافته و از عمر ماهواره می‌کاهد. برای مقابله با این اغتشاشات و به‌منظور حفظ مدار ماهواره جهت انجام اهداف مأموریتی، ماهواره‌ها مجهز به رانش‌گرهای کنترلی هستند [۲].

اغلب پیشران‌ها نیاز به مصرف سوخت بالایی دارند که موجب افزایش جرم ماهواره و در نتیجه هزینه بالای پرتاب آن خواهد شد [۲]. همچنین، طول عمر ماهواره وابسته به میزان موجودی سوخت آن نیز می‌باشد. امروزه، رانش‌گرهای الکتریکی به عنوان یک تکنولوژی کلیدی در سیستم‌های پیشران در نظر گرفته می‌شوند. این مساله به دلیل ویژگی ذاتی این رانش‌گرها است که منجر به کاهش مؤثر جرم سوخت و صرفه‌جویی در هزینه‌های عملیاتی ماهواره می‌شود. در میان فن‌آوری‌های مختلف موجود، رانش‌گرهای اثر هال یکی از مهمترین گزینه‌ها هستند که تولید رانش‌های کوچک و پیوسته را ممکن می‌سازند. این رانش‌گرها می‌توانند ضربه ویژه را چندین برابر بزرگ‌تر از انواع شیمیایی آن ایجاد کنند. بنابراین، یک جرم پیشران معین با کمک رانش‌گر اثر هال می‌تواند در مأموریتی با طول عمر طولانی‌تر مورد استفاده قرار گیرد [۳].

از جمله روش‌های مؤثر در کاهش مصرف سوخت، استفاده از تابع هزینه مناسب در طراحی کنترل‌کننده می‌باشد. در گذشته، برای کنترل مدار ماهواره از دستورات ایستگاه زمینی و با استفاده از روش‌های کنترل ضربه‌ای استفاده می‌شد [۲]. بدین منظور، اختلاف بردار مکان ماهواره نسبت به مدار مرجع محاسبه و سپس به ماهواره دستور روشن شدن پیشران برای مدت مشخصی صادر می‌گشت. از مشکلات این روش، خودکار نبودن کنترل مدار، مصرف سوخت بالا و حجم محاسبات بالا در ایستگاه‌های زمینی است [۴]. در حالی که کنترل خودکار علاوه بر کاهش مصرف سوخت و کاهش هزینه‌ها، موجب افزایش دقت مأموریت نیز می‌گردد [۲، ۴]. بنابراین، استفاده ترکیبی از رانش‌گرهای اثر هال به همراه تکنیک‌های کنترل خودکار مدار می‌تواند روش موثرتری برای دقت کنترل و مصرف بهینه سوخت باشد.

در سال‌های اخیر، مطالعاتی جهت کنترل خودکار حفظ مداری ماهواره‌های ارتفاع پایین انجام شده‌است. از بین این روش‌ها، کنترل پیش‌بین با توجه به این که قادر است چندین هدف کنترلی و بهینه‌گی تابع

هزینه مطلوب را با تضمین چندین قید سخت بر روی ورودی و خروجی تأمین کند، انتخاب مناسبی برای عملیات حفظ مداری است [۵]. در مرجع [۳] یک کنترل‌کننده پیش‌بین برای کنترل همزمان وضعیت و موقعیت ماهواره‌های GEO طراحی شده‌است. در مرجع [۲] یک کنترل‌کننده پیش‌بین برای به حداقل رساندن مصرف سوخت پیشنهاد و از رانش‌گرها برای ایجاد رانش‌های ضربه‌ای استفاده شده و در نهایت برتری کنترل‌کننده پیش‌بین نسبت به کنترل‌کننده LQR نشان داده شده‌است. همچنین در مرجع [۶] از یک کنترل‌کننده پیش‌بین استفاده گردیده که تنها نیروی اغتشاشی درگ جوی روی ماهواره را جبران می‌کند. شایان توجه است که مدل‌های دینامیکی بکار گرفته شده در مراجع فوق جهت توسعه کنترل‌کننده عمدتاً خطی هستند. علاوه بر این، تنها اثرات ناشی از اغتشاشات گرادیان جاذبه‌ای زمین و درگ جوی لحاظ گردیده‌اند. بنابراین در شرایط مداری واقعی، رخداد سایر انواع اغتشاشات در کنار عدم قطعیت‌های ذاتی موجود در پارامترهای مداری بر عملکرد کنترل‌کننده تأثیرگذار خواهد بود. بر این اساس، طراحی یک کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم<sup>۱</sup> با در نظر گرفتن کلیه اغتشاشات و عدم قطعیت‌های مذکور یک ضرورت محسوب می‌گردد. از طرف دیگر محافظه‌کاری ذاتی موجود در این کنترل‌کننده‌ها می‌تواند در دقت کنترل مداری نهائی تأثیرگذار باشد. بر این اساس، در این مقاله یک کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم با فرض عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات مداری نامعلوم پیشنهاد گردیده است که ضمن تضمین پایداری، دستیابی به عملکرد بهینه جهت تنظیم حالت‌ها و با حداقل مصرف سوخت را تضمین نماید. یکی از ویژگی‌های مهم این کنترل‌کننده، محاسبه آنلاین بهره کنترلی است که در زمان واقعی به‌منظور جبران اثرات اغتشاشات مداری و عدم قطعیت‌ها به روز رسانی می‌شود. برای این منظور، مسأله کنترل به یک مسأله  $LMI^2$  تبدیل می‌گردد که در آن قیود مربوط به توابع هزینه و شروط پایداری لیاپانوف که تضمین‌کننده عملکرد  $H_\infty$  در تقابل با اغتشاشات مداری می‌باشد، اضافه شده‌اند. بنابراین با حل این مسأله، بهره کنترل به گونه‌ای به روزرسانی می‌گردد که المان‌های مداری ماهواره، علی‌رغم حضور کلیه اغتشاشات مؤثر و نامعینی‌های مدل و از طرفی محدودیت‌های ذاتی رانش‌گرهای مذکور (تولید پیشران پیوسته و کوچک)، در محدوده مطلوب باقی خواهند ماند. نوآوری‌های اصلی مقاله به شرح زیر می‌باشند (۱) توسعه مدل غیرخطی برای المان‌های مداری نسبی مبتنی بر رانش‌گرهای اثر هال (۲) توسعه کنترل‌کننده پیش‌بین

تابش خورشید و گرانش خورشید و ماه است [۷]. عبارات تحلیلی برای این اغتشاشات در مراجع مختلف قابل استناد می باشند [۸-۱۰]. همان طور که قبلاً ذکر شد، در این مطالعه از رانش گر اثر حال جهت انجام اصلاحات مداری استفاده می شود. بردار شتاب کنترل در معادله (۱) که توسط این رانش گر در مختصات LVLH تولید می شود، به صورت زیر است [۴]:

$$\mathbf{a}_c = \frac{1}{m} \mathbf{F}_u \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_u = \mathbf{T}(\mathbf{q}_{IB}^*) (\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathfrak{R}_p \times]) \begin{pmatrix} (1+s_p)F_{cX} + b_p \\ (1+s_p)F_{cY} + b_p \\ (1+s_p)F_{cZ} + b_p \end{pmatrix} \quad (3)$$

که در آن  $\mathbf{F}_c = (F_{cX}, F_{cY}, F_{cZ})^T$  نیروی رانش ایجاد شده توسط رانش گر اثر حال است.  $\mathbf{T}(\mathbf{q}_{IB}^*)$  ماتریس تبدیل به دست آمده از کواترنیون ماهواره است که برای تبدیل نیروهای تولید شده از قاب ثابت بدنه به قاب ECI به کار می رود.  $S_p$  نشان دهنده ضرایب مقیاس رانش گر است که مقدار واقعی نیروهای تولید شده توسط این رانش گر را تنظیم می کند. همچنین، خطای هم تراز رانش گر در محوره های مختلف توسط  $\mathfrak{R}_p$  نشان داده می شود و  $b_p$  انحرافات تصادفی در تولید نیروی رانشی بوده که به صورت یک نویز سفید به شکل زیر مدل می شود:

$$E[b_p(t)b_p(t')^T] = \sigma_p^2 \delta(t-t') \quad (4)$$

که  $\delta(t)$  تابع ضربه واحد و  $\sigma_p^2$  ماتریس کوواریانس نویز را نشان می دهد.

### ۳ طراحی کنترل کننده

در این بخش، مراحل در نظر گرفته شده برای توسعه الگوریتم کنترل مدار بیان می شوند. در این راستا، مسئله کنترل مداری مطلق به یک مسئله کنترل نسبی شامل دو ماهواره تبدیل می شود. استفاده از این رویکرد، توسعه معادلات را ساده تر کرده و اعمال روش های کنترل مدرن سراسر تر می گردد. همچنین معادلات انحرافات را نسبت به مقدار نامی مطلوب نشان می دهند. یکی از این ماهواره ها مجازی بوده و تنها تحت تأثیر اغتشاش گرانشی قرار دارد؛ بنابراین، در ادامه، ابتدا المان های نسبی بین ماهواره واقعی و ماهواره مجازی تعریف می شوند. سپس، مدل فضای حالت بر اساس المان های مداری ذکر شده توسعه داده می شود. در ادامه، مسئله کنترل مداری با رویکرد کنترل پیش بین مقاوم حل

مقاوم با در نظر گرفتن باند بالای نامعلوم برای اغتشاشات و عدم قطعیت ها (۳) تضمین دستیابی به پایداری با حداقل مصرف سوخت برای رانش گرهای اثر حال.

ساختار مقاله حاضر بدین صورت است: در بخش ۲، مدل ماهواره ای شامل فریم های مرجع و مدل دینامیکی مدار ارائه شده است. بخش ۳ مراحل مختلف طراحی کنترل و تجزیه و تحلیل پایداری را ارائه می دهد. کارایی روش پیشنهادی در بخش ۴ با انجام شبیه سازی های عددی مختلف تأیید شده است. در نهایت، بخش ۵ به نتیجه گیری می پردازد.

### ۲ مدل دینامیکی مدار ماهواره و رانش گر اثر حال

در این مطالعه، از فریم اینرسی زمین مرکز<sup>۱</sup> ECI و دو فریم به مرکزیت ماهواره استفاده شده است. مرکز سیستم مختصات اینرسی با مرکز زمین منطبق است و محوره های آن نسبت به منظومه شمسی جهت های ثابتی دارند [۷]. محور Z قاب ECI در جهت مثبت محور چرخش زمین است. همچنین صفحه X-Y این فریم مختصات متناظر با صفحه استوایی است که عمود بر محور چرخش زمین است. محور X متناظر با بردار اعتدال بهاری<sup>۲</sup> است و محور Y با استفاده از قانون دست راست به دست می آید. فریم های با مرکزیت ماهواره، فریم های ثابت بر بدنه ماهواره و همچنین به صورت فریم های محلی-عمودی / محلی-افقی<sup>۳</sup> LVLH هستند. سیستم مختصات LVLH، در سه جهت شعاعی، مماسی و عمودی بوده و از قانون دست راست پیروی می کند. محور اول این سیستم مختصات همیشه مماس بر مدار و در راستای بردار سرعت ماهواره است. محور دوم موازی با بردار مومنوم زاویه ای است. در نهایت، محور سوم چارچوب مرجع را کامل می کند و همیشه هم راستا با بردار موقعیت در مدارهای دایره ای است [۸]. در ادامه، به مدل مدار ماهواره بر اساس معادلات مدار کپلری پرداخته می شود. معادلاتی که دینامیک ماهواره را در فریم ECI شامل موقعیت اینرسی  $\mathbf{r}$  و سرعت  $\mathbf{v}$  بیان می نمایند عبارتند از [۹].

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (1-الف)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_d \quad (1-ب)$$

که در آن  $\mu$  پارامتر گرانشی زمین و  $\mathbf{a}_c$  شتاب فرمان داده شده است که با استفاده از رانش گر حال تولید می گردد و  $\mathbf{a}_d$  شتاب اغتشاشات شامل میدان گرانش غیرکروی بودن زمین، درگ اتمسفر، فشار

1. Earth Centered Inertia  
2. Vernal Equinox  
3. Local-Vertical/Local-Horizontal

معادلات گاوس به‌دست آمده‌اند و اثرگذاری رانش‌گرها را بر روی مدل توصیف می‌کنند.  $\xi_{drag}$  اثرات ناشی از اغتشاش درگ جوی را نشان می‌دهد. بردار فرمان کنترلی در چارچوب LVLH، تولید شده توسط رانش‌گرها است.  $\mathbf{B}(\mathbf{O})$ ،  $\mathbf{A}(\mathbf{O}_R)$  و  $\xi_{drag}$  براساس ضمیمه A از مرجع [4] به‌دست می‌آیند. معادلات دینامیکی، حرکت نسبی مداری خطی را در زمان پیوسته توصیف می‌نماید. مدل خطی قادر به توصیف سیستم واقعی نیست. از سوی دیگر، تنها اثرات ناشی از میدان جاذبه زمین و درگ جوی در مدل ذکر شده لحاظ و دیگر اغتشاشات نادیده گرفته شده‌اند. بنابراین، با یک سیستم شامل عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات ناشناخته مواجه می‌شویم. به‌منظور پیاده‌سازی کنترل‌کننده در سخت‌افزار دیجیتال، این معادلات باید به شکل زمان گسسته تبدیل شوند. با در نظر گرفتن  $T_s$  به عنوان دوره نمونه‌برداری و با وارد کردن اثرات عدم قطعیت  $\Delta$  و اغتشاشات مجهول  $\xi_d(k)$  (نماینده کلیه اغتشاشات مداری)، معادله (۷) را می‌توان به‌صورت زیر گسسته نمود:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \Delta(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{H} \xi_d(k) \quad (8)$$

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{N}\mathbf{u}(k) \end{pmatrix} \quad (9)$$

که  $\mathbf{x}(k) = \xi(k)$  نشان‌دهنده حالت‌های سیستم در نمونه  $k$  ام،  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{a}_u(k)$  نشان‌دهنده شتاب کنترلی،  $\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}(\mathbf{O}_R)T_s)$  و  $\mathbf{B}_d = \int_0^{T_s} \exp(\mathbf{A}(\mathbf{O}_R)(T_s-t)) dt \mathbf{B}(\mathbf{O})$  ماتریس‌های ضرایب گسسته‌ای هستند که براساس هم‌تایان پیوسته خود استخراج می‌شوند و  $\xi_d(k)$  بردار اغتشاشات است که یک سیگنال انرژی محدود است و شامل  $\xi_{drag}$  و سایر اغتشاشات ناشناخته مداری است.  $\mathbf{H}$  ماتریس ضریب اغتشاشات است.  $\mathbf{Z}(k)$  خروجی کنترلی است و ماتریس‌های  $\mathbf{M}$  و  $\mathbf{N}$  شرط  $\mathbf{M}^T \mathbf{N} = \mathbf{0}$  را برآورده می‌کنند. پیش‌بین مقاوم در کل افق پیش‌بینی باتوجه‌به قانون کنترلی زیر به روز رسانی می‌شود:

$$\mathbf{u}(k+i|k) = \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k+i|k) \quad i=0,1,\dots,\infty \quad (10)$$

که  $\mathbf{x}(k+i|k)$  نشان‌دهنده وضعیت پیش‌بینی شده در  $i$  گام پیش رو است که باتوجه‌به مدل پیش‌بینی (۸) به‌دست می‌آید.  $\mathbf{G}(k)$  بهره فیدبک است که براساس مقادیر اغتشاشات مداری و عدم قطعیت‌ها به‌صورت برخط به روز می‌شود. با جایگزین کردن (۱۰) در (۸)، معادلات

گردیده و به تحلیل پایداری سیستم کنترل مداری پیشنهادی پرداخته می‌شود.

جهت تعیین موقعیت ماهواره و مدار آن، از شش عنصر مداری استفاده می‌شود. این عناصر، همچنین حرکت نسبی ماهواره نسبت به ماهواره مجازی (مدار مرجع) را بیان می‌کنند [۱۱]. یکی از متداول‌ترین روش‌های پارامترسازی برای نمایش حرکت نسبی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\delta \mathbf{O} = \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta e_x \\ \delta e_y \\ \delta i_x \\ \delta i_y \\ \delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a - a_R) / a_R \\ e_x - e_{xR} \\ e_y - e_{yR} \\ i - i_R \\ (\Omega - \Omega_R) \sin i \\ u - u_R \end{pmatrix} \quad (5)$$

که  $\mathbf{O} = (a \ e_x \ e_y \ i_x \ i_y \ u)^T$  میانگین المان‌های مداری را نشان می‌دهد.  $a$  نصف قطر بزرگ<sup>۱</sup> در بیضی،  $e_x$  مولفه  $x$  در بردار خروجی از مرکز<sup>۲</sup> ماهواره،  $e_y$  مولفه  $y$  در بردار خروجی از مرکز ماهواره،  $i$  زاویه میل<sup>۳</sup> ماهواره،  $\Omega$  زاویه بعد<sup>۴</sup> ماهواره و  $u$  آرگمان عرض جغرافیای ماهواره است. نمادهای با زیرنویس  $R$  عنصر مربوط به مدار مرجع را نشان می‌دهند. رابطه بین موقعیت مداری ماهواره در دستگاه اینرسی و المانهای مداری به‌صورت زیر است [۱۳]:

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{r} \\ \delta \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos u & -\sin u & 0 & 0 & 0 \\ -1.5u & 2\sin u & -2\cos u & 0 & 1/\tan i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sin u & -\cos u & 0 \\ 0 & \sin u & -\cos u & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 2\cos u & 2\sin u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos u & \sin u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta e_x \\ \delta e_y \\ \delta i_x \\ \delta i_y \\ \delta u \end{pmatrix} \quad (6)$$

مدل فضای حالت حرکت نسبی ماهواره به‌صورت زیر توصیف می‌شود [۱۳]:

$$\xi \approx \mathbf{A}(\mathbf{O}_R) \xi + \mathbf{B}(\mathbf{O}) \mathbf{a}_u + \xi_{drag} \quad (7)$$

که در آن  $\xi = a_R \delta \mathbf{O}$  بردار المانهای نسبی ماهواره می‌باشد که نسبت به  $a_R$  نرمالیز شده‌است.  $\mathbf{A}(\mathbf{O}_R)$  حرکت آزاد المان‌های مداری را توصیف می‌کند که بطور ویژه متأثر از اثرات جاذبه زمین و نیروی درگ جوی می‌باشد. المان‌های ماتریس  $\mathbf{B}(\mathbf{O})$  با تقریب خوبی با استفاده از

1. Semi Major
2. Eccentricity
3. Inclination
4. Right Ascension of the Ascending Node

اگر حداکثر تابع هدف،  $\eta$  در نظر گرفته شود، مسئله کنترل پیش‌بین مقاوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{P}(k), \mathbf{G}(k)} \eta \\ & \text{subject to:} \\ (16) \quad & \mathbf{v}(k+i+1|k) - \mathbf{v}(k+i|k) \leq -\mathbf{Z}(k+i|k)^T \mathbf{Z}(k+i|k) + \\ & + \gamma^2 \xi_a^2(k+i|k)^T \xi_a(k+i|k) \end{aligned}$$

در ادامه، مسئله کنترل پیش‌بین مقاوم به صورت یک مسئله نابرابری ماتریس خطی<sup>۱</sup> فرمول‌بندی می‌شود. در ابتدا، فرض لازم و لم‌های مورد استفاده بیان می‌شوند:

**فرض ۱.** تابع غیرخطی  $\Delta$  لیبشیتز محلی<sup>۲</sup> و تابع یکنواخت<sup>۳</sup>  $C$  است. فرض می‌شود که ماتریس ثابت  $\mathbf{E}$  وجود دارد که نامساوی زیر برآورده شود [۱۴]:

$$\Delta(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))^T \Delta(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \quad (17)$$

**لم ۱ (متمم شور<sup>۴</sup>).** نابرابری‌های زیر معادل هستند [۲]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} > \mathbf{0} \equiv \begin{cases} \mathbf{R} > \mathbf{0}, \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T > \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} > \mathbf{0}, \mathbf{R} - \mathbf{S}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S} > \mathbf{0} \end{cases} \quad (18)$$

ماتریس‌های  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$  و  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$  غیرمفرد هستند.  
**لم ۲.** برای ماتریس‌های  $\mathbf{X}$  و  $\mathbf{Y}$  با ابعاد مناسب و ثابت  $\varepsilon > 0$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \leq \varepsilon \mathbf{X}^T \mathbf{X} + \varepsilon^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \quad (19)$$

**قضیه ۱.** سیستم کنترل حلقه بسته به دست آمده در رابطه (۱۱) را در نظر بگیرید. همچنین فرض می‌گردد که رابطه (۱۷) برقرار باشد و  $\xi_a(k)$  به مجموعه  $\mathcal{Y} = \{\xi_a \in \mathbf{R}^q \mid \|\xi_a\|_2 \leq \gamma\}$  متعلق باشد. در این صورت، طرح کنترل پیش‌بین مقاوم (۱۶) سیستم حلقه بسته را به‌طور مجانبی پایدار می‌کند، اگر ماتریس‌های  $\mathbf{U} = \mathbf{P}^{-1}$ ،  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{G}\mathbf{\Phi}$ ،  $\mathbf{\Phi} = \eta \mathbf{W}$  و  $\mathbf{\Omega} = \eta \mathbf{U}$  و اسکالرهایی  $\theta = \lambda^{-1}$  و  $\varphi = \eta\theta$  وجود داشته باشند به طوری که مسئله بهینه‌سازی زیر برآورده گردد:

$$\underset{\eta, \Omega, \varphi, \Phi, \Lambda}{\text{minimize}} \quad \eta \quad (20)$$

سیستم حلقه بسته مربوطه در افق پیش‌بینی به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+i+1|k) &= (\mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{G}(k)) \mathbf{x}(k+i|k) + \\ &+ \Delta(\mathbf{x}(k+i|k), \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k+i|k)) + \\ &+ \mathbf{H} \xi_a(k+i|k) \end{aligned} \quad (11)$$

جهت تضعیف اغتشاشات مداری در خروجی، دو شرط زیر باید برقرار باشند:

- (۱) با  $\xi_a(k) = \mathbf{0}$  سیستم حلقه بسته (۱۱) پایدار مجانبی باشد.
- (۲) با وجود اغتشاشات  $\xi_a(k)$ ، سیستم حلقه بسته (۱۱) شرط زیر را برآورده سازد [۱۱]:

$$\frac{\sum_0^{\infty} \mathbf{Z}(k)^T \mathbf{Z}(k)}{\sum_0^{\infty} \xi_a(k)^T \xi_a(k)} \leq \gamma^2 \quad (12)$$

که در آن  $\gamma$  سطح تضعیف اغتشاش است. شروط ۱ و ۲ در صورتی تضمین می‌شوند که شرط پایداری لیاپانوف در افق پیش‌بینی به صورت زیر تامین شود [۱۲]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k+i+1|k) - \mathbf{v}(k+i|k) &\leq -\mathbf{Z}(k+i|k)^T \mathbf{Z}(k+i|k) + \\ &+ \gamma^2 \xi_a^2(k+i|k)^T \xi_a(k+i|k), \quad i=0,1,\dots,\infty \end{aligned} \quad (13)$$

از طرفی، جهت دستیابی به حداکثر دقت مداری و حداقل مصرف سوخت، تابع هدف با افق پیش‌بینی نامحدود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$J_{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{x}(k+i|k)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+i|k) + \mathbf{u}(k+i|k)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(k+i|k)] \quad (14)$$

که  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$  و  $\mathbf{R} = \mathbf{N}^T \mathbf{N}$ . از آنجا که در رانش‌گرها، نیروی پیش‌رانش به‌طور مداوم تولید می‌شود، مصرف سوخت تابعی از شتاب معادل است که در عبارت دوم تابع هزینه منعکس می‌شود. معادله (۱۴) همچنین تضمین می‌کند که انرژی خروجی کنترل یک حد بالایی برای همه تحریک‌های خارجی با انرژی محدود دارد. در نهایت، مسئله کنترل پیش‌بین مقاوم به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{P}(k), \mathbf{G}(k)} \max_{\xi_a} J_{\infty} \\ & \text{subject to:} \\ & \mathbf{v}(k+i+1|k) - \mathbf{v}(k+i|k) \leq -\mathbf{Z}(k+i|k)^T \mathbf{Z}(k+i|k) + \\ & + \gamma^2 \xi_a^2(k+i|k)^T \xi_a(k+i|k) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & * & * \\ \gamma^2 \psi^2 & -\eta \gamma^2 \psi^2 & * \\ \mathbf{x}(k) & 0 & -\mathbf{\Omega} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta v \leq & (1 + \varepsilon)(\mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k)) + \\ & (1 + \varepsilon)(\xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k)) + (1 + 2\varepsilon) \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ & + \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + L | k) \\ & + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) - \mathbf{x}^T(k + i | k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k + i | k) \end{aligned} \quad (27)$$

با در نظر گرفتن نابرابری  $\mathbf{P} \leq \lambda I$ ، که در آن  $\lambda$  حداکثر مقدار ویژه  $\mathbf{P}$  است و اعمال قانون کنترل فیدبک (۹) و فرض ۱، عبارت غیرخطی به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{A} \leq & \lambda \Delta^T \mathbf{A} \leq \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k + i | k) \\ \mathbf{u}(k + i | k) \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k + i | k) \\ \mathbf{u}(k + i | k) \end{bmatrix} \\ = & \lambda \mathbf{x}(k + i | k)^T \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k + i | k) \end{aligned} \quad (28)$$

با جایگزینی (۲۸) در (۲۷)، رابطه زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} \Delta v \leq & (1 + \varepsilon)(\mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k)) + \\ & (1 + \varepsilon)(\xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k)) + \\ & (1 + 2\varepsilon) \lambda \mathbf{x}(k + i | k)^T \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k + i | k) + \\ & + \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k) + \\ & + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) - \mathbf{x}^T(k + i | k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k + i | k) \end{aligned} \quad (29)$$

با جایگزینی (۲۹) در (۱۳)، شرط پایداری لیاپانوف در افق پیش‌بینی به‌صورت زیر برقرار می‌گردد:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)(\mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k)) + \\ (1 + \varepsilon)(\xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k)) + \\ (1 + 2\varepsilon) \lambda \mathbf{x}(k + i | k)^T \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k + i | k) + \\ + \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k) + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) - \\ - \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k + i | k) + \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{x}(k + i | k) + \\ + \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{G}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{G} \mathbf{x}(k + i | k) - \gamma^2 \xi_d^T(k + i | k) \xi_d(k + i | k) \leq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

نابرابری (۳۰) را می‌توان به‌فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k + i | k) \\ \xi_d(k + i | k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k + i | k) \\ \xi_d(k + i | k) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (31)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} T_{11} = & -(1 + \varepsilon) \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d - (1 + 2\varepsilon) \lambda \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} + \\ & + \mathbf{P} - \mathbf{M}^T \mathbf{M} - \mathbf{G}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (32)$$

$$T_{22} = -(1 + \varepsilon) \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H} + \gamma^2 I, T_{12} = T_{21}^T = -\mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{H}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T - \mathbf{\Omega} \sqrt{1 + 2\varepsilon^{-1}} [\mathbf{\Phi}^T \ \mathbf{\Lambda}^T] \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{M}^T \ \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{N}^T \ 0 \ \sqrt{1 + \varepsilon} (\mathbf{A}_d \mathbf{\Phi} + \mathbf{B}_d \mathbf{\Lambda})^T \\ * \ \varphi I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ * \ * \ \eta I \ 0 \ 0 \ 0 \\ * \ * \ * \ \eta I \ 0 \ 0 \\ * \ * \ * \ * \ \eta \gamma^2 I \ \eta \sqrt{1 + \varepsilon} \mathbf{H}^T \\ * \ * \ * \ * \ * \ \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{\Omega} - \varphi I \geq 0 \quad (23)$$

\* عناصر متقارن و ماتریس واحد با علامت  $I$  نشان داده می‌شود.

**اثبات.** ابتدا، قید LMI مربوط به شرایط پایداری لیاپانوف (۱۳) به‌دست آورده می‌شود. تابع لیاپانوف منتخب در افق پیش‌بینی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{v}(k + i | k) = \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k + i | k), \quad i = 0, 1, \dots, \infty \quad (24)$$

که  $\mathbf{P}$  یک ماتریس معین مثبت است. معادلات تفاضلی تابع لیاپانوف (۲۴) در امتداد مسیر حاصل از سیستم حلقه بسته (۱۰) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \Delta v = & \mathbf{v}(k + i + 1 | k) - \mathbf{v}(k + i | k) = (\mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) + \mathbf{\Delta} + \\ & + \mathbf{H} \xi_d(k + i | k))^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) + \mathbf{\Delta} + \mathbf{H} \xi_d(k + i | k)) - \\ & - \mathbf{x}^T(k + i | k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k + i | k) \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن  $\mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{G}$ . با جایگذاری مقادیر، معادله (۲۵) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta v = & \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) + \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{\Delta} + \\ & + \mathbf{x}(k + i | k)^T \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k) + \mathbf{\Delta}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) + \\ & + \mathbf{\Delta}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k) + \mathbf{\Delta}^T \mathbf{P} \mathbf{\Delta} + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k) + \\ & + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) + \\ & + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H} \xi_d(k + i | k) + \\ & + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k + i | k) + \\ & + \xi_d(k + i | k)^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{\Delta} - \mathbf{x}^T(k + i | k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k + i | k) \end{aligned} \quad (26)$$

با استفاده از لم ۲، نابرابری زیر برآورده می‌شود:

نابرابری (۳۷) به این معنی است که اگر نبرابری‌های زیر برقرار باشند، آنگاه (۳۸) نتیجه گرفته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \Phi + \Phi^T - \Omega & \sqrt{1+2\varepsilon}^{-1}[\Phi^T \quad \Lambda^T]E^T & \Phi^T M^T & \Lambda^T N^T & 0 & \sqrt{1+\varepsilon}(A_d \Phi + B_d \Lambda)^T \\ * & \varphi I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \eta I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \eta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \eta \gamma^2 I & \eta \sqrt{1+\varepsilon} H^T \\ * & * & * & * & * & \Omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (38)$$

$$\lambda I - P \geq 0 \Rightarrow \theta^{-1} I - U^{-1} \geq 0 \Rightarrow \eta \varphi^{-1} I - \eta \Omega^{-1} \geq 0 \Rightarrow \varphi^{-1} I - \Omega^{-1} \geq 0 \quad (39)$$

با دو بار استفاده از متمم شور، نبرابری زیر حاصل می‌گردد:

$$\Omega - \varphi I \geq 0 \quad (40)$$

در گام دوم، یک LMI برای کران بالای تابع هزینه (۱۶)، در نظر گرفته می‌شود و با جمع کردن تغییرات تابع لیپانوف (۲۰) از  $i=0$  تا  $i \rightarrow \infty$  نبرابری زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} [\mathbf{x}(k+i+1|k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k+i+1|k) - \\ & - \mathbf{x}(k+i|k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k+i|k)] \leq - \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Z}(k+i|k)^T \mathbf{Z}(k+i|k) + \\ & + \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \xi_d(k+i|k)^T \xi_d(k+i|k) \end{aligned} \quad (41)$$

باتوجه به  $\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \xi_d(k+i|k)^T \xi_d(k+i|k)} < \psi$  و تابع هزینه (۱۴)، نبرابری زیر به دست می‌آید:

$$-\mathbf{x}(k|k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k|k) \leq -J_{\infty} + \gamma^2 \psi^2 \quad (42)$$

که در نتیجه نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$J_{\infty} \leq \mathbf{x}(k|k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k|k) + \gamma^2 \psi^2 \quad (43)$$

و به عبارتی:

$$\gamma^2 \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(k) + \gamma^2 \psi^2 < \eta \quad (44)$$

که منجر می‌شود به:

$$-1 + \begin{bmatrix} \gamma^2 \psi^2 \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^{-1} \gamma^{-2} \psi^{-2} & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 \psi^2 \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

اگر  $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \geq 0$  برقرار باشد، آنگاه نبرابری (۳۱) نیز بر آورده

می‌شود. نبرابری  $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \geq 0$  را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{pmatrix} T_{11}' & 0 \\ * & \gamma^2 I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{1+\varepsilon}(A_d + B_d G)^T \\ \sqrt{1+\varepsilon} H^T \end{pmatrix} (P) \begin{pmatrix} \sqrt{1+\varepsilon}(A_d + B_d G) & \sqrt{1+\varepsilon} H \end{pmatrix} \geq 0 \quad (33)$$

که در رابطه فوق از متغیرهای زیر استفاده گردیده است:

$$T_{11}' = -(1+2\varepsilon^{-1}) \lambda \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix}^T E^T E \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} + P - M^T M - G^T N^T N G \quad (34)$$

با اعمال لم متمم شور، داریم:

$$\begin{pmatrix} T_{11}' & 0 & \sqrt{1+\varepsilon}(A_d + B_d G)^T \\ * & \gamma^2 I & \sqrt{1+\varepsilon} H^T \\ * & * & P^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (35)$$

با ضرب کردن  $\eta^{\frac{1}{2}} \text{bdiag}(\mathbf{W}, I, I)$  و  $\eta^{\frac{1}{2}} \text{bdiag}(\mathbf{W}^T, I, I)$  به ترتیب در قبل و بعد از نبرابری (۳۵)، می‌توان آن را به صورت رابطه (الف-۱) موجود در پیوست نوشت. معادله (الف-۱) را می‌توان با دو بار استفاده از متمم شور به نبرابری‌های (الف-۲) موجود در پیوست تبدیل کرد. با در نظر گرفتن  $\Omega = \eta U$  و  $\Phi = \eta W$ ،  $\Lambda = G \Phi$ ،  $U = P^{-1}$  و اسکالرهای  $\theta = \lambda^{-1}$  و  $\varphi = \eta \theta$  و با استفاده از متمم شور نبرابری زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} \Phi^T \Omega^{-1} \Phi & \sqrt{1+2\varepsilon}^{-1}[\Phi^T \quad \Lambda^T]E^T & \Phi^T M^T & \Lambda^T N^T & 0 & \sqrt{1+\varepsilon}(A_d \Phi + B_d \Lambda)^T \\ * & \varphi I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \eta I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \eta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \eta \gamma^2 I & \eta \sqrt{1+\varepsilon} H^T \\ * & * & * & * & * & \Omega \end{pmatrix} \geq 0 \quad (36)$$

شرط لازم برای پاسخ‌پذیری (۳۶) این است که  $\Phi^T \Omega^{-1} \Phi$  و  $\Omega$  مثبت معین<sup>۱</sup> باشند. بنابراین،  $\Phi$  رتبه کامل است. اگر  $\Phi > 0$ ، پس ماتریس  $(\Omega - \Phi)^T \Omega^{-1} (\Omega - \Phi)$  مثبت معین است و در نتیجه، نبرابری زیر حاصل می‌گردد:

$$(\Omega - \Phi)^T \Omega^{-1} (\Omega - \Phi) \geq 0 \Rightarrow \Phi^T \Omega^{-1} \Phi \geq \Phi + \Phi^T - \Omega \quad (37)$$

جدول ۳- مقادیر اولیه المان‌های مداری در تولید مدار مرجع

المان‌های مداری	
۷۱۳۰۵۲۲	$a$ (m)
۰/۰۴۰۵۸	$e_x$
۰/۰۰۲۷۷۴	$e_y$
۹۸/۲۸	$i$ (deg)
۳۵۱/۷۴	$\Omega$ (deg)
۱۲۳/۳۸	$u$ (deg)

در این بخش، نشان‌دهنده می‌شود که طرح کنترل پیش‌بین مقاوم توسعه‌یافته، المان‌های مداری را در محدوده مطلوب حفظ می‌نماید. در این روش، بهره کنترل به صورت آنلاین، به روز می‌شود. شبیه‌سازی در MATLAB Simulink انجام شده و مسئله بهینه‌سازی با جعبه‌ابزار Yalmip حل شده‌است. در شبیه‌سازی‌های انجام‌شده، از مدل پیش‌بینی (۱۰) برای به‌دست‌آوردن حالات در افق پیش‌بینی استفاده می‌شود. جهت بررسی اعتبار طراحی، ابتدا کنترل‌کننده به دینامیک خطی (۷) اعمال می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱ ملاحظه می‌شود، تمام مقادیر عناصر نسبی به صفر رسیده‌اند. شکل ۲ نتایج اعمال کنترل‌کننده به مدل دینامیک غیرخطی (۱) در یک دوره ۳۰ روزه است که با کنترل‌کننده LQR مقایسه شده‌است. همان‌طور که اشاره شد، این مدل اثرات تمام اغتشاشات مداری، رفتارهای غیرخطی و منابع خطای مختلف در نیروی رانش تولید شده توسط رانش‌گرها را در نظر می‌گیرد. مطابق با شکل فوق، کنترل‌کننده RMPC پیشنهادی تمام عناصر مداری ماهواره را در محدوده دقیق‌تری نسبت به کنترل‌کننده LQR نگه داشته‌است. خاطر نشان می‌شود که اگر چه RMPC برای مدل خطی طراحی شده‌است، اما به دلیل مقاوم‌بودن طرح کنترل نسبت به عوامل ناشناخته و اغتشاشات، خطای مدل (۷) نسبت به مدل دقیق مداری (۱) جبران گردیده‌است. در حالیکه کنترل‌کننده LQR فاقد این قابلیت بوده که به‌وضوح در نتایج حاصل شده قابل‌درک است. برای بررسی دقیق‌تر نتایج، تغییرات پارامترهای حفظ مداری در دستگاه اینرسی ( $\delta x$   $\delta y$   $\delta z$ ) در شکل ۳ رسم شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، خطای حفظ مداری از محدوده مجاز (۵۰۰ متر) که با خطچین قرمز در شکل‌ها مشخص شده‌اند، تجاوز نمی‌کند. شکل ۴، سیگنال تولیدی رانش‌گر در معادله (۳) را طی یک دوره ۱۰۰ روزه نشان می‌دهد، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، محدودیت‌های مربوط به مشخصات رانش‌گر اثر هال ارائه شده در جدول ۲ (در محدوده تراست شش میلی نیوتن) برآورده شده‌اند. همان‌طور که انتظار می‌رفت، به دلیل استفاده از فناوری پیشرفته اثر هال، پیش‌رانش موردنیاز ماهواره برای نگهداری مداری، پیوسته و با مقادیر کم هستند که جایگزین افزایش سرعت تکانشی در رانش‌گرهای شیمیایی یا الکتریکی مشابه شده‌است.

با استفاده از متمم شور و در نظر گرفتن  $\mathbf{P} = \eta \mathbf{\Omega}^{-1}$ ، (۴۵) معادل LMI زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} -1 & * & * \\ \gamma^2 \psi^2 & -\eta \gamma^2 \psi^2 & * \\ \mathbf{x}(k) & 0 & -\mathbf{\Omega} \end{bmatrix} < 0 \quad (46)$$

#### ۴ شبیه‌سازی‌های عددی

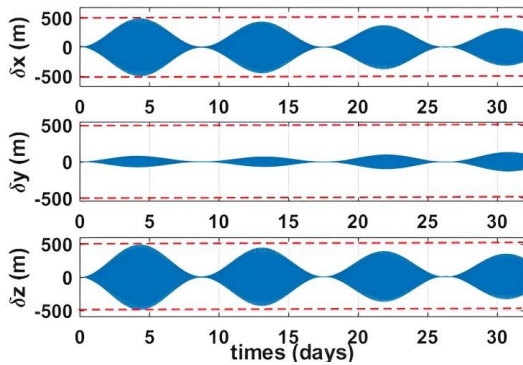
در این بخش، نتایج شبیه‌سازی‌های عددی برای اعتبارسنجی عملکرد روش کنترل مدار پیشنهادی ارائه می‌شوند. بدین منظور، دینامیک و پارامترهای فیزیکی فضایی ماهواره را نشان می‌دهد. همچنین جدول ۱ مشخصات فیزیکی این ماهواره را نشان می‌دهد. همچنین مشخصات رانش‌گر اثر هال و مقادیر فرض شده برای منابع خطای مختلف که در رابطه (۳) توصیف شده‌اند در جدول ۲ آورده شده‌اند. مقادیر اولیه پارامترهای مداری در جدول ۳ نشان داده شده‌اند.

جدول ۱- مشخصات فیزیکی ماهواره

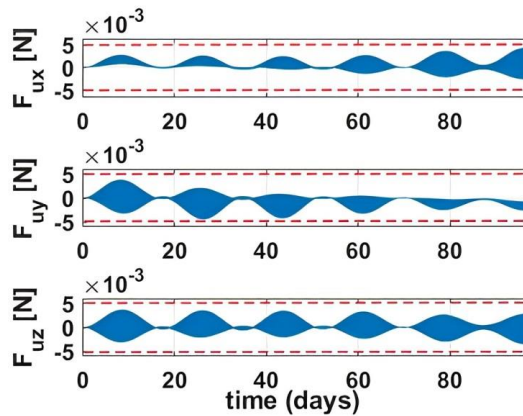
مقدار	مشخصات
۱۵۵/۱۲	جرم (کیلوگرم)
۰/۵۶۲۵	سطح درگ (مترمربع)
۲/۵	ضریب درگ
۰/۵۶۲۵	سطح موثر در تشعشع خورشید (مترمربع)
۵/۵	ضریب بازتابش سطح ماهواره

جدول ۲- مشخصات رانش‌گر اثر هال

مقدار	مشخصات
۱۰۰W	توان
۱۰۰۰S	ضریب ویژه
۶mN	محدوده تراست
$\sigma_p = \text{diag}(0.3, 0.3, 0.3) \text{ mN}\sqrt{s}$	نویز
$s_p = 300 \text{ ppm}$	ضریب مقیاس
$\mathfrak{R}_p = \text{diag}(0.3, 0.3, 0.3) \frac{\text{mrad}}{\text{axis}}$	خطای هم‌ترازی



شکل ۳- خطای موقعیت ماهواره نسبت به مدار مرجع

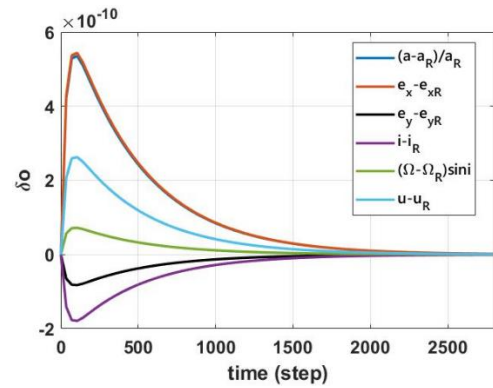


شکل ۴- سیگنال تولیدی رانش‌گرهای اثر هال

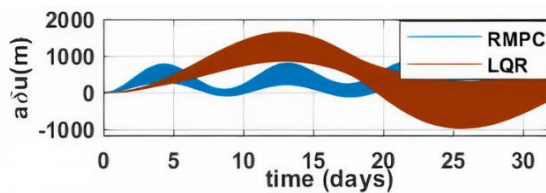
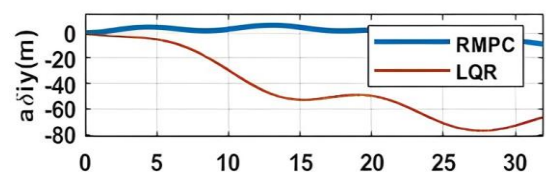
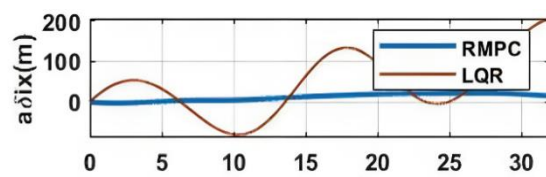
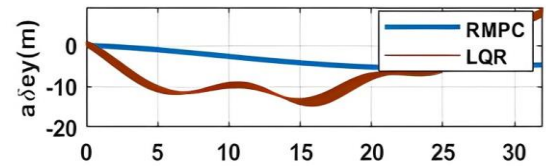
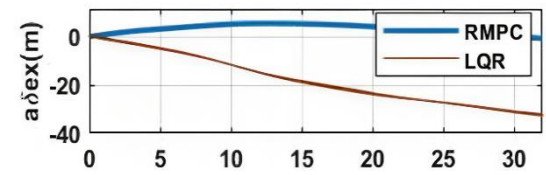
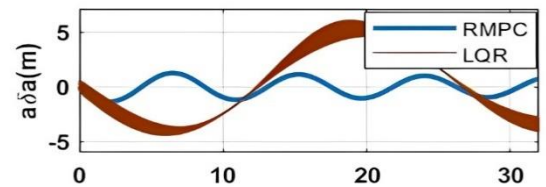
جدول ۴ به وضوح عملکرد برتر کنترل‌کننده توسعه یافته را در مقایسه با روش‌های مشابه نشان می‌دهد.

جدول ۴- مقایسه عملکرد دو کنترل‌کننده

	RMPC	LQR
$a\delta a, (m)$ مقدار کمینه	-1.32	-4.46
$a\delta a, (m)$ مقدار بیشینه	1.3	6.07
$F_{ux} (N)$ مقدار کمینه	$-0.1 \times 10^{-3}$	-0.036
$F_{ux} (N)$ مقدار بیشینه	$2.7 \times 10^{-3}$	0.051
$F_{uy} (N)$ مقدار کمینه	$-4.4 \times 10^{-3}$	-0.023
$F_{uy} (N)$ مقدار بیشینه	$3.7 \times 10^{-3}$	0.037
$F_{uz} (N)$ مقدار کمینه	$-3.1 \times 10^{-3}$	-0.028
$F_{uz} (N)$ مقدار بیشینه	$3.6 \times 10^{-3}$	0.071



شکل ۱- المان‌های مداری کنترل شده در مدل خطی دینامیک مداری



شکل ۲- المان‌های مداری کنترل شده در مدل غیرخطی دینامیک مداری

[4] S. De Florio, S. D'Amico, and G. Radice, "Virtual formation method for precise autonomous absolute orbit control," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 37, no. 2, pp. 425-438, 2014, <https://doi.org/10.2514/1.61575>.

[5] A. Weiss, U. V. Kalabić, and S. Di Cairano, "Station keeping and momentum management of low-thrust satellites using MPC," *Aerospace Science and Technology*, vol. 76, pp. 229-241, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.02.014>.

[6] M. Leomanni, A. Garulli, A. Giannitrapani, and F. Scortecci, "An adaptive groundtrack maintenance scheme for spacecraft with electric propulsion," *Acta Astronautica*, vol. 167, pp. 460-466, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.11.035>.

[7] M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, Cambridge university press, 1997.

[8] C. He *et al.*, "Review and comparison of empirical thermospheric mass density models," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 103, pp. 31-51, 2018, <https://libgen.li/edition.php?id=79029893>.

[9] J. R. Wertz, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer Academic Publishers, 2012.

[10] B. CE, "International geomagnetic reference field: The seventh generation," *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, vol. 49, no. 2-3, pp. 123-148, 1997, <https://libgen.li/edition.php?id=76265458>.

[11] A. A. Ozdemir, P. Seiler, and G. J. Balas, "Design tradeoffs of wind turbine preview control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 4, pp. 1143-1154, 2013, <https://libgen.li/edition.php?id=32576377>.

[12] K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Kemin Zhou, John Comstock Doyle, 1998.

[13] P. Micheau, "Orbit control techniques for LEO satellites," *Spaceflight Dynamics*, Vol. 1, Cepadues-Editions, Toulouse, France, 739-902, 1995

[14] S. Liu, Y. Sang, and H. Jin, "Robust model predictive control for stratospheric airships using LPV design," *Control Engineering Practice*, vol. 81, pp. 231-243, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2018.09.007>.

## ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل حفظ مداررانشکی یک ماهواره مدار پایین از طریق فرمان‌دهی پیوسته به رانش‌گرهای اثر هال توسعه داده شده‌است. بدین منظور، یک روش مبتنی بر کنترل پیش‌بین مقاوم جهت بهینه‌سازی مصرف سوخت و حداقل‌سازی خطای حفظ مداری که دارای قیود پایداری سیستم حلقه بسته و مقاوم بودن  $H_\infty$  می‌باشد، طراحی شده‌است. به عبارت دقیق‌تر، جهت حل مسئله کنترلی موردنظر و محاسبه بهره کنترلی، یک مسئله بهینه‌سازی با قیود LMI به کمک جعبه‌ابزار Yalmip حل گردید. مدل دینامیکی در نظر گرفته شده، مدل حرکت نسبی ماهواره نسبت به ماهواره مجازی است که تحت تاثیر اغتشاشات طبیعی بوده و عدم قطعیت‌هایی در مدل‌سازی آن وجود دارد. شبیه‌سازی‌ها، اثرگذاری طرح کنترل پیشنهادی را تایید کرده و نشان داده شد که موقعیت نسبی ماهواره در محدوده مجاز باقی مانده و حفظ مداری ماهواره با کارایی بالا انجام می‌شود. همچنین نتایج شبیه‌سازی، برتری روش پیشنهادی را در مقایسه روش بهینه‌سازی LQR نشان می‌دهند که یک روش مطرح در این حوزه محسوب می‌گردد.

## تعارض منافع

هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده‌است.

## مراجع

- [1] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 2nd ed. Springer Netherlands, 2001.
- [2] M. Tavakoli and N. Assadian, "Model predictive orbit control of a Low Earth Orbit satellite using Gauss's variational equations," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 228, no. 13, pp. 2385-2398, 2014, <https://libgen.li/edition.php?id=34561840>.
- [3] D. O'Reilly, G. Herdrich, and D. F. Kavanagh, "Electric propulsion methods for small satellites: A review," *Aerospace*, vol. 8, no. 1, 2021, Art. no. 22, <https://doi.org/10.3390/aerospace8010022>.

## پیوست الف:

$$\left( \begin{array}{ccc} \eta \mathbf{W}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W} + \eta(1+2\varepsilon^{-1})\lambda \mathbf{W}^T \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{W} & 0 & \mathbf{W}^T \eta \sqrt{1+\varepsilon} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{G})^T \\ +\eta \mathbf{W}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{W} + \eta \mathbf{W}^T \mathbf{G}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{G} \mathbf{W} & & \\ * & \eta \gamma^2 I & \eta \sqrt{1+\varepsilon} \mathbf{H}^T \\ * & * & \eta \mathbf{P}^{-1} \end{array} \right) \geq 0 \quad (\text{الف-۱})$$

$$\left( \begin{array}{ccccc} \eta \mathbf{W}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W} + \eta(1+2\varepsilon^{-1})\lambda \mathbf{W}^T \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}^T \mathbf{E}^T \mathbf{E} \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W}^T \mathbf{M}^T & \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{N}^T & 0 & \eta \mathbf{W}^T \sqrt{1+\varepsilon} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{G})^T \\ * & \eta I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \eta I & 0 & 0 \\ * & * & * & \eta \gamma^2 I & \eta \sqrt{1+\varepsilon} \mathbf{H}^T \\ * & * & * & * & \eta \mathbf{P}^{-1} \end{array} \right) \geq 0 \quad (\text{الف-۲})$$