



E-ISSN: 2676-4253

Journal of Technology in Aerospace Engineering

Vol. 9, No. 2, pp. 1-16, 2025

<https://doi.org/10.22034/jtae.2025.9.2.1>

Journal Homepage: <https://jtae.ari.ac.ir>



Original Research Paper

# Thermomechanical Buckling Analysis of Rectangular Piezoelectric Sandwich Microplates

Mostafa Livani\* , Mohammad Rajae , and Vahid Khalafi 

Department of Aerospace Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

## ARTICLE INFO

### Article History:

Received 20 December 2023

Revised 08 May 2024

Accepted 11 May 2024

Available Online 18 May 2024

### Keywords:

Buckling

Microplate

Sandwich structure

Honeycomb

Piezoelectric

## ABSTRACT

This study investigates the thermomechanical buckling behavior of supported sandwich honeycomb rectangular microplates subjected to thermal loading and applied voltage. The structure comprises barium titanate piezoelectric face sheets and an aluminum honeycomb core. A high-order shear deformation theory is employed to formulate the displacement field. The governing equations are derived using the virtual displacement principle and solved via the Navier method. Parametric analysis evaluates the microplate aspect ratio, fiber orientation angle, length, face-to-core thickness ratio, and piezoelectric voltage influence on buckling behavior. Findings indicate that the critical buckling load decreases with increasing temperature, applied voltage, microplate length, thickness, and honeycomb cell angle.

\* Corresponding Author's E-mail: [m.livani@ssau.ac.ir](mailto:m.livani@ssau.ac.ir)

## How to Cite this Article:

M. Livani, M. Rajae, and V. Khalafi, "Thermomechanical buckling analysis of rectangular piezoelectric sandwich microplates," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, Vol. 9, No. 2, pp. 1-16, 2025, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jtae.2025.9.2.1>.

## COPYRIGHTS

Authors retain the copyright and full publishing rights.

Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article licensed under the [Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).





# تحلیل کماتش ترمومکانیکی میکروصفحه‌های ساندویچی پیزوالکتریک مستطیلی

مصطفی لیوانی<sup>۱\*</sup> ID، محمد رجائی<sup>۲</sup> ID، و وحید خلفی<sup>۳</sup> ID

\* ۳ و ۱- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران  
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

## چکیده

در این مقاله، رفتار کماتش ترمومکانیکی یک میکروصفحه مستطیلی لانه زنبوری ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی ساده تحت حرارت و ولتاژ اعمالی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مدل مورد مطالعه از دو رویه پیزوالکتریک از جنس تیتانات باریوم و یک هسته لانه زنبوری آلومینیومی تشکیل شده است. برای معادلات جابه‌جایی از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی و برای استخراج معادلات حاکم از اصل جابه‌جایی مجازی استفاده شد و معادلات به کمک روش ناویر حل شدند. در این مقاله، هم‌چنین آثار نسبت منظری میکروصفحه، ابعاد طولی، زاویه لایه‌چینی، نسبت ضخامت رویه به هسته و ولتاژ لایه پیزوالکتریک بر روی کماتش ترمومکانیکی میکروصفحه مستطیلی لانه زنبوری ساندویچی مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که با افزایش دما، ولتاژ اعمالی، طول میکروصفحه، ضخامت و زاویه سلول‌های لانه زنبوری، مقدار بار کماتش بحرانی کاهش می‌یابد.

## اطلاعات مقاله

### تاریخچه مقاله:

دریافت ۲۹ آذر ۱۴۰۲  
بازنگری ۱۹ اردیبهشت ۱۴۰۳  
پذیرش ۲۲ اردیبهشت ۱۴۰۳  
اولین انتشار ۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۳

### واژه‌های کلیدی:

کوماتش  
میکروصفحه  
سازه ساندویچی  
لانه زنبوری  
پیزوالکتریک

\* پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [m.livani@ssau.ac.ir](mailto:m.livani@ssau.ac.ir)

## How to Cite this Article:

M. Livani, M. Rajae, and V. Khalafi, "Thermomechanical buckling analysis of rectangular piezoelectric sandwich microplates," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, Vol. 9, No. 2, pp. 1-16, 2025, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jtae.2025.9.2.1>.

## COPYRIGHTS

Authors retain the copyright and full publishing rights.

Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article licensed under the [Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



## ۱ مقدمه

در میان بارهای وارد بر اجزای سازه، بارهای محوری فشاری به دلیل ایجاد ناپایداری هندسی، حتی قبل از رسیدن به حد تسلیم بسیار مورد توجه طراحان قرار می‌گیرند. هنگامی که یک سازه اعم از ستون یا ورق در معرض بار فشاری محوری قرار می‌گیرد، از نظر بارگذاری موقعیتی وجود دارد که اگر مقدار بار به اندازه بسیار کوچکی افزایش یابد، باعث ایجاد تغییرشکل عرضی بزرگی در سازه می‌گردد. به این تغییرشکل ناگهانی در اثر اعمال بار فشاری، کمانش و بار متناظر با آن را بار بحرانی کمانش می‌گویند. لذا محاسبه بارهای بحرانی کمانش در سازه‌های مختلف، از جمله مهم‌ترین موضوعاتی است که دانشمندان و مهندسان هوافضا، مکانیک و عمران به آن پرداخته‌اند. پدیده کمانش در سازه هواپیما می‌تواند از جمله عوامل اصلی بروز یک سانحه باشد. سازه هواپیماها به گونه‌ای طراحی می‌شوند که تا در برابر این پدیده مقاوم باشند، یا در صورت بروز این پدیده، هواپیما بتواند مأموریت خود را در ایمن‌ترین سطح ممکن به پایان برساند و از بروز سانحه جلوگیری شود.

باتوجه به استفاده روزافزون از سازه‌های هوشمند در صنعت هوایی و اهمیت بررسی رفتار این مواد و نقش آن‌ها در رخداد سوانح هوایی از یک طرف، و از طرفی دیگر اهمیت بررسی و مطالعه پدیده کمانش که یکی از پدیده‌های مخرب مهم در سازه‌های هوایی است، در ابتدا به مطالعه پیشینه پژوهش پرداخته می‌شود.

فرولنی و همکاران [۱] در سال ۲۰۰۷ به بررسی تجربی و عددی رفتار شکست سازه‌های توخالی مرکب تحت فشار هیدرواستاتیکی پرداختند. آن‌ها در پژوهش خود برای درک بهتر مکانیزم شکست در اثر کمانش، از نرم‌افزار ANSYS استفاده کردند. علی‌بیگلو و کانی [۲] در سال ۲۰۱۰ به بررسی تغییرشکل کوچک رویه استوانه‌ای مرکب دارای لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارهای ترمومکانیکی و الکتریکی پرداختند. ماهی و همکاران [۳] در سال ۲۰۱۱ با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی هایپربولیک، به مطالعه پدیده کمانش و ارتعاشات آزاد یک صفحه ساندویچی پرداختند. آن‌ها برای استخراج معادلات حرکت از اصل همپلتون و برای حل معادلات از روش ناویر<sup>۱</sup> استفاده کردند. یاس و صمدی [۴] در سال ۲۰۱۲ آثار پدیده‌های ارتعاشات آزاد و کمانش بر روی یک تیر مرکب را با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی بررسی کردند. آن‌ها در روش تحلیلی معادلات حاکم بر مسئله را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند. تایی و چویی [۵] در

سال ۲۰۱۲ به بررسی پدیده کمانش صفحه FGM<sup>۲</sup> با روش تحلیلی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی پرداختند. رفیعی و همکاران [۶] در سال ۲۰۱۳ به تحلیل حرارتی غیرخطی آثار پدیده کمانش بر روی تیر ساندویچی با هسته هوشمند پیزوالکتریک و رویه‌های مرکب با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی پرداختند. ردی و همکاران [۷] در سال ۲۰۱۳ به تجزیه و تحلیل پدیده کمانش یک صفحه با روش تحلیلی با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی پرداختند. آن‌ها معادلات بدست آمده را با استفاده از روش ناویر حل کردند. یعقوبی [۸] در سال ۲۰۱۳ به تحلیل پدیده کمانش صفحه ساندویچی با هسته FGM با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول<sup>۳</sup> و شرایط مرزی مختلف پرداخت و روشی برای کاهش حجم معادلات حاکم ارائه دادند. ژانگ و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۴ به بررسی رفتار کمانش، ارتعاشات آزاد و خمش استاتیکی میکروتیرها با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم برشی پرداختند. آن‌ها از قانون موری-تانکا جهت تخمین توزیع خواص مواد در جهت ضخامت استفاده کردند. وایت و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۴ آثار پدیده کمانش بر روی یک استوانه مرکب چندلایه با ضخامت متغیر را با استفاده از روش عددی المان محدود و روش تجربی به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند. دبسکی و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۶ به بررسی آثار پدیده کمانش بر روی پنل نازک مرکب با استفاده از روش تجربی آزمایشگاهی و روش عددی المان محدود پرداختند. کویباک و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۱۶ اثر پدیده کمانش یک تیر مرکب چندلایه را با استفاده از روش تجربی آزمایشگاهی، روش عددی المان محدود و روش تحلیلی با استفاده از تئوری کویترا<sup>۴</sup> بررسی کردند. یانگ و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۷ به بررسی و مطالعه آثار پدیده کمانش بر روی تیر مرکب چندلایه با استفاده از روش تحلیلی پرداختند. روزیلو و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۱۷ آثار پدیده کمانش بر روی پنل مرکب چندلایه با شرایط بارگذاری محوری با استفاده از روش‌های عددی و تجربی را بررسی کردند. صیاد و قوگال [۱۵] در سال ۲۰۱۷ به مطالعه و بررسی پژوهش‌های انجام شده تحلیلی بر روی پدیده‌های کمانش، خمش و ارتعاشات آزاد با هندسه‌های مختلف سازه‌های ساندویچی و مرکب چندلایه پرداختند. کبیر و طاووسی [۱۶] در سال ۲۰۱۷ به مطالعه تحلیلی آثار حرارتی و مکانیکی پدیده کمانش بر روی یک پنل هوشمند پرداختند. معادلات استخراج شده را با استفاده از روش گالرکین حل کردند. مکسی و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۷ یک تئوری تغییرشکل برشی برای پاسخ‌های خمشی، کمانشی و ارتعاش آزاد صفحات FGM با استفاده از اصل همپلتون و روش ناویر ارائه

1. Navier Method  
2. Functionally Graded Material  
3. First Order Shear Deformation Theory  
4. Koiter's Theory

در سال ۲۰۱۸ آثار پدیده کمانش را بر روی یک استوانه مرکب چندلایه با استفاده از روش عددی المان محدود بررسی کردند. میتائو و همکاران [۳۱] در سال ۲۰۱۸ به مطالعه و تحلیل آثار خمش و کمانش یک پنل تخت ساندویچی با هسته مرکب و رویه‌های هوشمند با استفاده از روش عددی المان محدود و روش تحلیلی که در آن از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول استفاده شده‌است، پرداختند. صفرپور و همکاران [۳۲] در سال ۲۰۱۸ به مطالعه و بررسی وابستگی آثار پدیده‌های کمانش و ارتعاشات آزاد به ضخامت استوانه مرکب چندلایه با استفاده از روش تحلیلی پرداختند. ژال و همکاران [۳۳] در سال ۲۰۱۸ آثار مکانیکی پدیده کمانش را بر روی یک صفحه مرکب FGM و یک صفحه دو انحنای هوشمند با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. علی‌میرزایی و همکاران [۳۴] در سال ۲۰۱۹ به تحلیل غیرخطی المان محدود پدیده‌های ارتعاشات آزاد، کمانش و خمش یک تیر مرکب معیوب پرداختند. محار و همکاران [۳۵] در سال ۲۰۱۹ به مطالعه و بررسی یک پنل ساندویچی با هسته مرکب و رویه‌های هوشمند با استفاده از روش عددی پرداختند. کیم و همکاران [۳۶] در سال ۲۰۱۹ به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش دینامیکی صفحات FGM با استفاده از روش تحلیلی گالرکین پرداختند. آن‌ها در پژوهش خود تأثیر پارامترهای هندسی و دما را مورد بررسی قرار دادند. صبحی و همکاران [۳۷] در سال ۲۰۱۹ کمانش و ارتعاشات آزاد صفحات متخلخل با استفاده از تئوری گرادیان و اصل همپلتون مدلسازی کردند. عارفی و مسکینی [۳۸] در سال ۲۰۱۹ ارتعاشات آزاد یک صفحه پیزوالکتریک با هسته متخلخل با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی هایپربولیک را تحلیل کردند. آن‌ها برای استخراج معادلات حرکت از اصل همپلتون استفاده کردند و سپس این معادلات را با استفاده از روش ناویر حل کردند. نوین و همکاران [۳۹] در سال ۲۰۱۹ ارتعاشات آزاد، کمانش و خمش صفحات تقویت‌شده با استفاده از فرمولاسیون NURBS انجام دادند. آن‌ها در این پژوهش از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا برای بدست آوردن معادلات حاکم استفاده کردند. حبیبی و همکاران [۴۰] در سال ۲۰۱۹ پدیده‌های کمانش و ارتعاشات آزاد یک استوانه ساندویچی با هسته مرکب چندلایه متخلخل و رویه‌های هوشمند با استفاده از اصل همپلتون تحلیل و بررسی کردند. روزالین و سینگ [۴۱] در سال ۲۰۲۰ به مطالعه و بررسی کمانش صفحات مرکب ساندویچی با استفاده از تئوری زیگ‌زاگ و روش عددی المان محدود پرداختند. ملیکان و ارمیو [۴۲] در سال ۲۰۲۰ یک تئوری مرتبه بالای هایپربولیک برای تیر FGM معیوب با استفاده از روش تحلیلی گالرکین ارائه دادند. بوازا و زنکور [۴۳] در سال ۲۰۲۰ کمانش

کردند. گیا نین [۱۸] در سال ۲۰۱۷ به بررسی کمانش غیرخطی رویه استوانه‌ای مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری کلاسیک پرداختند. رادوان [۱۹] در سال ۲۰۱۷ به بررسی غیرخطی آثار شرایط محیط حرارتی بر کمانش صفحات ساندویچی با هسته سرامیکی بر پایه تئوری تغییرشکل برشی هایپربولیک پرداخت و یک رابطه جدید هایپربولیک در پژوهش خود ارائه کرد. صبحی و رادوان [۲۰] در سال ۲۰۱۷ یک تئوری برای تحلیل ارتعاشات آزاد و کمانش یک صفحه ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم را استخراج کردند و با استفاده از روش ناویر معادلات بدست آمده را حل کردند. انصاری و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۱۷ آثار پدیده‌های کمانش و ارتعاشات آزاد پنل مرکب با بارگذاری حرارتی با استفاده از روش عددی را بررسی کردند. الویلی و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۱۷ اثر فیبر طبیعی را به عنوان تقویت‌کننده پنل مرکب بر روی رفتار کمانش آن با استفاده از روش تجربی آزمایشگاهی بررسی کردند. صبحی و زنکور [۲۳] در سال ۲۰۱۸ کمانش یک تیر مرکب چندلایه با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی هایپربولیک را به کمک اصل انرژی پتانسیل کمینه و روش ناویر بررسی کردند. گائو و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۱۸ پدیده کمانش دینامیکی غیرخطی رویه‌های استوانه‌ای ارتوتروپیک معیوب تحت بار محوری را تحلیل کردند. آن‌ها در این پژوهش از روابط نظری بر اساس تئوری بهبودیافته رویه دائل استفاده کردند و با استفاده از روش گالرکین معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدست آمده را حل کردند. وانگ و همکاران [۲۵] در سال ۲۰۱۸ بر روی اثر کمانش یک رویه استوانه‌ای معیوب با یک ساختار جدید مقاوم در برابر دما بر اساس تئوری رویه دائل<sup>۱</sup>، مدل کویترو و روش گالرکین به تحلیل و بررسی پرداختند. وان دو و لی [۲۶] در سال ۲۰۱۸ یک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا شبه سه‌بعدی برای تحلیل کمانش حرارتی صفحات FGM بر اساس روش بدون شبکه ارائه دادند. هنگ و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۸ به بررسی کمانش صفحه متخلخل پرداختند. آن‌ها در این پژوهش، یک مدل تحلیلی بر اساس تئوری مرتبه بالای تغییرشکل برشی ردی و روش گالرکین برای صفحه‌ای تحت نیروهای ترمومکانیکی ارائه دادند. کومار و همکاران [۲۸] در سال ۲۰۱۸ کمانش دوماحوری صفحه مرکب چندلایه با استفاده از تئوری مرتبه دوم برشی را تحلیل کردند. آلمیدا و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۱۸ به مطالعه خطی و غیرخطی پدیده کمانش در اثر بار محوری بر روی یک استوانه همسانگرد با استفاده از روش تجربی آزمایشگاهی، روش عددی المان محدود و روش تحلیلی پرداختند. وانگ و همکاران [۳۰]

را محاسبه کردند و دریافتند که پدیده فلاتر برای تیر یکسر گیردار با توزیع کاهشی افزایشی نسبت به توزیع یکنواخت مطلوب‌تر می‌باشد، و با حرکت جرم برای تیر یکسرگیردار از ابتدای تیر به مرکز تیر، فرکانس کاهش پیدا می‌کند.

با بررسی مقالات و پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه پدیده کمانش بر روی سازه‌های مرکب، این نتیجه حاصل می‌شود که با توجه به تعداد کم پژوهش‌های صورت گرفته بر روی سازه‌های ساندویچی هوشمند نسبت به بقیه، نیاز به تحقیقات و مطالعه بیشتری بر روی این مواد می‌باشد.

همچنین از روش تحلیلی نسبت به روش‌های عددی و تجربی استفاده بیشتری شده‌است که علت آن سرعت بالا، دقت کافی، هزینه پایین و امکان بررسی همه پارامترها می‌باشد.

با بررسی تئوری‌های صورت گرفته، با توجه به دقت بالاتر تئوری‌های مرتبه بالا برای بررسی پنل‌های ضخیم، در این پژوهش از این تئوری برای تحلیل کمانش استفاده خواهد شد.

در این مقاله رفتار کمانش ترمومکانیکی یک میکروصفحه مستطیلی لانه زنبوری ساندویچی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مدل مورد مطالعه از دو رویه پیزوالکتریک و یک هسته لانه زنبوری تشکیل شده‌است. برای معادلات جابه‌جایی از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی استفاده خواهد شد و برای استخراج معادلات حاکم از اصل جابه‌جایی مجازی استفاده می‌شود و معادلات به کمک روش ناوبر حل می‌شوند. جابه‌جایی‌ها بسیار کوچک فرض شده‌اند.

## ۲ روش انجام تحقیق

در این بخش روش انجام تحقیق تشریح می‌شود. هندسه مورد بررسی، استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی، کار نیروهای خارجی و نتیجه‌های تنش در این بخش توضیح داده می‌شود.

### ۲.۱ هندسه مورد بررسی

مدل مورد مطالعه در این تحقیق میکروصفحه مسطح ساندویچی مستطیلی به طول  $a$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $z$  با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده مطابق شکل ۱ است. این میکروصفحه ساندویچی از یک هسته با ضخامت  $h_c$  تشکیل شده‌است. این لایه از جنس آلومینیوم و به شکل لانه زنبوری ساخته شده‌است که توسط دو رویه پیزوالکتریک فوقانی و تحتانی از جنس تیتانات باریم ( $BaTiO_3$ ) با ضخامت‌های به ترتیب  $h_t$  و  $h_b$  پوشیده شده‌است. ضخامت کل میکروصفحه با  $h$  بیان می‌شود.

ترمو مکانیکی تیر ساندویچی مرکب با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک را بررسی کردند. آن‌ها در پژوهش خود آثار دما، غلظت رطوبت، نسبت طول به ضخامت و ضریب انبساط حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. بالاکریشنا و همکاران [۴۴] در سال ۲۰۲۰ کمانش صفحه ساندویچی متخلخل با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا را تحلیل کردند. دستجردی و همکاران [۴۵] در سال ۲۰۲۰ رفتار کمانش صفحات مرکب چندلایه متخلخل تقویت شده با نانولوله‌های کربنی همراه با لایه‌های پیزوالکتریک را بررسی کردند و برای استخراج معادلات از تئوری مرتبه سوم برشی و روش موری-تاناکا استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که تعبیه تخلخل در هسته باعث کاهش پاسخ‌های مکانیکی و بهبود قابل توجه مقاومت در برابر کمانش حرارتی می‌شود. یوان و همکاران [۴۶] در سال ۲۰۲۰ به تحلیل کمانش غیرخطی میکرورویه‌های مخروطی تحت فشار هیدرواستاتیک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا پرداختند. لی و فدرسون [۴۷] در سال ۲۰۲۰ به مطالعه پدیده کمانش بر روی یک پنل تخت مرکب چندلایه با استفاده از روش تحلیلی و عددی پرداختند. جرمستیبیارت و همکاران [۴۸] در سال ۲۰۲۰ به بررسی آثار پدیده کمانش در محیط حرارتی بر روی پنل تخت هوشمند پیزوالکتریک با استفاده از روش عددی پرداختند. الوایی و همکاران [۴۹] در سال ۲۰۲۰ رفتار پدیده کمانش در محیط حرارتی بر روی پنل تخت مرکب هوشمند با استفاده از روش تحلیلی بررسی کردند. حیدری و همکاران [۵۰] در سال ۲۰۲۳ به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای با رویه FML<sup>۱</sup> و هسته FGM با استفاده از یک تئوری پوسته جدید پرداختند. آن‌ها اثر عبارت‌های مربوط به شکل دوزنقه‌ای مقطع پوسته را در نتیجه‌های تنش پوسته به طور دقیق محاسبه کردند و سپس با افزودن انرژی کرنشی نظیر تنش‌های اولیه و انرژی کرنشی، بر اساس اصل همیلتون، معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای دو سر ساده را استخراج کردند و با استفاده از این معادلات، تحلیل مقدار ویژه (ارتعاشات آزاد) را انجام دادند و نتایج پژوهش خود را با نتایج تئوری و تجربی سایر محققان و نتایج حاصل از نرم‌افزار ABAQUS مقایسه کردند. معبودی و شکراللهی [۵۱] در سال ۲۰۲۳ به تحلیل فلاتر تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی دارای جرم متصله تحت جریان مافوق صوت پرداختند. آن‌ها ناپایداری آبرولاستیک یک تیر مستطیل شکل با شرایط تکیه‌گاهی مختلف را توسط معادلات حاکم بر ارتعاشات این سیستم دینامیکی بر اساس اصل همیلتون تعیین کردند و سپس با حل معادلات به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در نهایت فرکانس طبیعی سیستم دینامیکی مذکور

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} \\ &\quad + f(z) \frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} \\ &\quad + f(z) \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) \psi_2(x, y) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dz} f(z) \right) \psi_1(x, y) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_0(x, y) \\ &\quad - z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w_0(x, y) + \frac{1}{2} f(z) \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} u_0(x, y) + \frac{1}{2} f(z) \frac{\partial}{\partial y} \psi_1(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

### ۳.۲.۲ روابط هسته لانه زنبوری

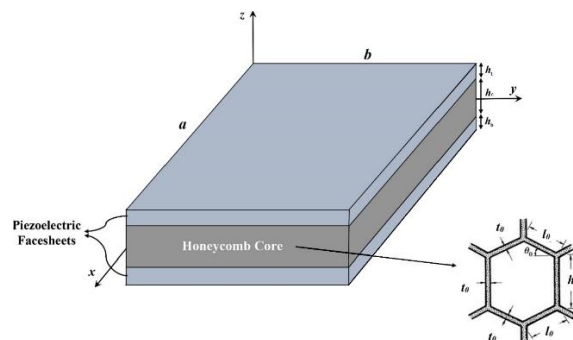
به دلیل سبکی و سفتی بالا در هسته میکروصفحه از جنس لانه زنبوری استفاده شده‌است. مقدار مدول یانگ در راستای x و y به صورت زیر بی‌بعدسازی شده‌است [۵۴]:

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= \frac{E_x}{E_H} = (1 - \gamma_0^2 \cot^2 \theta_0) \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0 (\beta_0 + \sin \theta_0)} \gamma_0^3 \\ \bar{E}_y &= \frac{E_y}{E_H} = [1 - \gamma_0^2 (\beta_0 \sec^2 \theta_0 + \tan^2 \theta_0)] \frac{\beta_0 + \sin \theta_0}{\cos^3 \theta_0} \gamma_0^3 \end{aligned} \quad (4)$$

مدول برشی بی‌بعدشده در صفحات xy، xz و yz نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{xy} &= \frac{G_{xy}}{E_H} = \frac{\beta_0 + \sin \theta_0}{(1 + 2\beta_0) \cos \theta_0} \frac{\gamma_0^3}{\beta_0^2} \\ \bar{G}_{xz} &= \frac{G_{xz}}{E_H} = \frac{\cos \theta_0}{\beta_0 + \sin \theta_0} \gamma_0 \\ \bar{G}_{yz} &= \frac{\beta_0 + \sin \theta_0}{(1 + 2\beta_0) \cos \theta_0} \gamma_0 \leq \bar{G}_{yz} = \frac{G_{yz}}{E_H} \leq \frac{\beta_0 + 2 \sin^2 \theta_0}{2(\beta_0 + \sin \theta_0) \cos \theta_0} \gamma_0 \\ \bar{G}_{yz} &= \frac{\beta_0 + \sin \theta_0}{2(1 + 2\beta_0) \cos \theta_0} \gamma_0 + \frac{\beta_0 + 2 \sin^2 \theta_0}{4(\beta_0 + \sin \theta_0) \cos \theta_0} \gamma_0 \end{aligned} \quad (5)$$

نسبت پواسون و چگالی بی‌بعدشده نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:



شکل ۱- میکروصفحه مورد مطالعه به همراه ابعاد و مختصات.

Fig. 1. The studied microplate dimensions and coordinates.

### ۲.۲ استخراج معادلات

استخراج معادلات شامل مواردی چون میدان جابه‌جایی، کرنش‌ها، روابط هسته لانه زنبوری، روابط تنش-کرنش هسته لانه زنبوری، روابط تنش-کرنش برای لایه‌های پیزوالکتریک، معادلات حاکم، منتجه‌های تنش، کار نیروهای خارجی و حل تحلیلی می‌باشد که در ادامه به طور مفصل به آن‌ها می‌پردازیم.

### ۱.۲.۲ میدان جابه‌جایی

در این مقاله، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا (HSDT) برای مدلسازی میدان جابه‌جایی استفاده می‌شود. میدان جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌گردد [۵۲]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \psi_1(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \psi_2(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(x, y) = w_0(x, y)$$

در این روابط  $u(x, y, z)$  و  $v(x, y, z)$  و  $w(x, y)$  به ترتیب جابه‌جایی‌ها در راستای x و y و z می‌باشند. اندیس 0 بیانگر سطح میانی در راستای محور z و  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  بیانگر چرخش صفحه میانی به ترتیب حول محور y و x می‌باشد.

در این مقاله تابع  $f(z)$  به صورت زیر در نظر گرفته شده‌است:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) \quad (2)$$

### ۲.۲.۲ کرنش‌ها

با داشتن میدان جابه‌جایی میکروصفحه و استفاده از روابط کرنش جابه‌جایی می‌توان کرنش‌ها را به صورت زیر تعریف کرد [۵۳]:

که در آن ضرایب پیزوالکتریک و اجزای میدان الکتریکی هستند. پتانسیل الکتریکی در طول ضخامت رویه‌ها به صورت زیر تغییر می‌کند [۵۶]:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{2z\phi_0}{h_{t,b}} - \cos\left(\frac{\pi z}{h_{t,b}}\right)\phi(x, y) \quad (10)$$

که در آن  $\phi_0$  ولتاژ خارجی اعمال شده و  $\phi$  تابع پتانسیل الکتریکی می‌باشد.

اجزای میدان الکتریکی نیز به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{E_p, E_q\} = -\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\} = \left\{\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\right\} \cos\left(\frac{\pi z}{h_{t,b}}\right) \quad (11)$$

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{2\phi_0}{h_{t,b}} - \frac{\pi}{h_{t,b}} \sin\left(\frac{\pi z}{h_{t,b}}\right)\phi(x, y)$$

جابه‌جایی‌های الکتریکی هم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{t,b} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}^{t,b} \begin{Bmatrix} E_p \\ E_q \\ E_r \end{Bmatrix} \quad (12)$$

که در آن D بردار جابه‌جایی الکتریکی و  $\kappa_{ij}$  ضرایب نفوذپذیری دی‌الکتریک می‌باشد.

### ۶.۲.۲ معادلات حاکم

در این بخش به کمک اصل جابه‌جایی مجازی معادلات حاکم به صورت زیر استخراج می‌شوند [۵۹]:

$$\delta(U - W) = 0 \quad (13)$$

U بیانگر انرژی کرنشی و W کار نیروهای خارجی می‌باشد.

$$\nu_{xy} = (1 - \gamma_0^2 \csc^2 \theta_0) \frac{\cos^2 \theta_0}{(\beta_0 + \sin \theta_0) \sin \theta_0}$$

$$\nu_{yz} = [1 - \gamma_0^2 (1 + \beta_0) \sec^2 \theta_0] \frac{(\beta_0 + \sin \theta_0) \sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \quad (6)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_H} = \frac{(2 + \beta_0)\gamma_0}{2(\beta_0 + \sin \theta_0) \cos \theta_0}$$

در روابط بالا  $E_x$  و  $E_H$  به ترتیب مدول یانگ در راستای x و مدول یانگ هسته لانه زنبوری می‌باشند. همچنین  $G_H$  مدول برشی هسته و  $\rho_H$  چگالی هسته می‌باشد.

همچنین دو مقدار بی‌بعد شده دیگر با نام‌های نسبت داخلی ( $\beta_0$ ) و ضخامت سلول ( $\gamma_0$ ) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_0 = \frac{h_0}{l_0}, \gamma_0 = \frac{t_0}{l_0} \quad (7)$$

که در آن  $l_0$  طول ضلع شش‌ضلعی،  $h_0$  ارتفاع شش‌ضلعی و  $\theta_0$  زاویه نسبت به افق می‌باشد.

### ۴.۲.۲ روابط تنش-کرنش هسته لانه زنبوری

هسته لانه زنبوری را می‌توان یک ماده ارتوتروپیک فرض کرد. برای این صفحه ارتوتروپیک، روابط تنش-کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۵]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^c = \begin{bmatrix} c_{11}^c & c_{12}^c & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^c & c_{22}^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

در این رابطه  $c_{mn}$  ( $m, n = 1, \dots, 6$ ) ثابت‌های سفتی ماده ارتوتروپیک هستند.

### ۵.۲.۲ روابط تنش-کرنش برای لایه‌های پیزوالکتریک

روابط تنش-کرنش برای لایه‌های پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{t,b} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}^{t,b} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{t,b} \begin{Bmatrix} E_p \\ E_q \\ E_r \end{Bmatrix}$$

تغییرات انرژی کرنشی در هر لایه به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^s &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} f'(z) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \chi_{yy}^s &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} f'(z) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \chi_{zz}^s &= \frac{1}{2} f'(z) \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \\ \chi_{xy}^s &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{4} f'(z) \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \\ \chi_{yz}^s &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{4} f(z) \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} f''(z) \psi_1 \\ \chi_{xz}^s &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} f(z) \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} f''(z) \psi_2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\delta U = \int_V \left( \begin{aligned} &\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} \\ &+ 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + m_{xx} \delta \chi_{xx} + m_{yy} \delta \chi_{yy} \\ &+ 2m_{xy} \delta \chi_{xy} + 2m_{yz} \delta \chi_{yz} + 2m_{xz} \delta \chi_{xz} \\ &- D_x \delta E_x - D_y \delta E_y - D_z \delta E_z \end{aligned} \right)^{top} \\ \left( \begin{aligned} &\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} \\ &+ 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + m_{xx} \delta \chi_{xx} + m_{yy} \delta \chi_{yy} + 2m_{xy} \delta \chi_{xy} \\ &+ 2m_{yz} \delta \chi_{yz} + 2m_{xz} \delta \chi_{xz} \end{aligned} \right)^{core} \\ \left( \begin{aligned} &\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} \\ &+ 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + m_{xx} \delta \chi_{xx} + m_{yy} \delta \chi_{yy} + 2m_{xy} \delta \chi_{xy} \\ &+ 2m_{yz} \delta \chi_{yz} + 2m_{xz} \delta \chi_{xz} - D_x \delta E_x - D_y \delta E_y \\ &- D_z \delta E_z \end{aligned} \right)^{bottom} dV \quad (14)$$

لذا رابطه ۱۴ برای تغییرات انرژی کرنشی به فرم زیر تغییر می یابد:

که در آن  $m_{ij}^s$  بیانگر تنش مرتبه بالاتر است و به صورت زیر تعریف می شود [۵۷]:

$$m_{ij}^s = 2\mu L_2^2 \chi_{ij}^s \quad (15)$$

$L_2$  پارامتر مقیاس طول ماده می باشد و  $\chi_{ij}^s$  گرادبان متقارن چرخشی بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2} (\Theta_{i,j} + \Theta_{j,i}) \quad (16)$$

$$\Theta_i = \frac{1}{2} (\text{curl}(d))_i$$

در این رابطه  $d$  بیانگر بردار جابه جایی و  $\Theta$  بردار چرخش بینهایت کوچک می باشد.

$\mu$  نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mu^{c,b,t} = \frac{C_{44}^{c,b,t} + C_{55}^{c,b,t} + C_{66}^{c,b,t}}{3} \quad (17)$$

با جایگذاری روابط بالا در عبارت دوم رابطه (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{1}{2} f'(z) \psi_2 \\ \Theta_y &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{2} f'(z) \psi_1 \\ \Theta_z &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} + f(z) \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

و با جایگذاری روابط در عبارت اول رابطه (۱۶) آرایه های تانسور گرادبان کششی انحرافی به صورت زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \left[ - \left( \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{yz}^1}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{xz}^1}{\partial x \partial y} \right) \delta u_0 \right. \\ &\quad - \left( \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{xz}^1}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{yz}^1}{\partial x \partial y} \right) \delta v_0 \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S_{xy}^1}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 S_{xy}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{yy}^1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S_{xx}^1}{\partial x \partial y} \right) \delta w_0 \\ &\quad + \left( -\frac{\partial Q_{xx}^1}{\partial x} - \frac{\partial Q_{xy}^1}{\partial y} + Q_{xy}^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{yz}^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{xz}^2}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} S_{yz}^4 - \frac{1}{2} \frac{\partial S_{xy}^3}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial S_{yy}^3}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial S_{zz}^3}{\partial y} \right) \delta \psi_1 \\ &\quad + \left( -\frac{\partial Q_{yy}^1}{\partial y} - \frac{\partial Q_{xy}^1}{\partial x} + Q_{yz}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{xz}^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{yz}^2}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} S_{xz}^4 - \frac{1}{2} \frac{\partial S_{zz}^3}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial S_{xy}^3}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial S_{xx}^3}{\partial x} \right) \delta \psi_2 \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \bar{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{D}_y}{\partial y} + \bar{D}_z \right) \delta \phi \right] dA \quad (20) \end{aligned}$$

## ۷.۲.۲ منتجه های تنش

منتجه های تنش در روابط بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

که در آن  $U, V, W, \Psi_1, \Psi_2$  و  $\Phi$  دامنه جابه‌جایی‌ها و پیچش میکروصفحه، و ضرایب  $\alpha = m\pi/a$  و  $\beta = n\pi/b$  جایگزین توابع پیشنهادی در معادلات (۲۵) هستند. با قراردادی روابط، ماتریس ضرایب جابه‌جایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$([K_e] - N_{cr}[K_g])\{X\} = 0 \quad (26)$$

که در آن  $K_e$  و  $K_g$  به ترتیب ماتریس سختی<sup>۱</sup> و ماتریس هندسی سختی هستند.  $N_{cr}$  نیز بار کمانش بحرانی می‌باشد و  $\{X\}$  بردار جابه‌جایی است. حل این مسئله مقدار ویژه، بار کمانش بحرانی سازه را نتیجه می‌دهد. کوچکترین مقدار ویژه سیستم معادلات رابطه ۲۶ برابر با نیروی کمانش می‌باشد.

### ۳ اعتبارسنجی

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل کمانش ترمومکانیکی میکروصفحه با نتایج مرجع دیگر مقایسه می‌شود. در جدول ۱ مقایسه نتایج این مقاله با مرجع [۶۰] آورده شده که مشاهده می‌شود که نتایج حاصل شده تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند که این تطابق نشان‌دهنده صحت تئوری مورد مطالعه در این مقاله می‌باشد.

### ۴ نتایج

بار کمانش بحرانی بی‌بعد شده به صورت  $\frac{N_{cr}a^2}{Eh^3}$  تعریف می‌شود. آلومینیوم انتخاب شده برای هسته لانه زنبوری دارای مشخصات مطابق با جدول ۲ است. همچنین لایه‌های پیزوالکتریک از جنس  $BaTiO_3$  انتخاب شده است که مشخصات الکترومکانیکی آن به صورت جدول ۳ است.

جدول ۱ - مقایسه نتایج تحلیل کمانش میکروصفحه ساندویچی با نتایج مرجع [۶۰].

Table 1. Comparison of sandwich microplate buckling analysis results with reference results [60].

$\gamma_2$											
0.5		1		1.5		2		1.5		3	
[60]	Current	[60]	Current	[60]	Current	[60]	Current	[60]	Current	[60]	Current
9.64	9.65	4.81	4.82	3.22	3.21	2.41	2.41	1.92	1.93	1.62	1.60
6.42	6.43	3.83	3.86	2.75	2.75	2.12	2.14	1.73	1.75	1.46	1.48
4.79	4.82	3.18	3.21	2.39	2.41	1.89	1.93	1.60	1.60	1.37	1.37
3.82	3.86	2.74	2.75	2.13	2.14	1.72	1.75	1.47	1.48	1.28	1.28
3.19	3.21	2.38	2.41	1.90	1.93	1.53	1.60	1.36	1.37	1.18	1.20
2.74	2.75	2.11	2.14	1.72	1.75	1.42	1.48	1.25	1.28	1.12	1.13
2.39	2.41	1.89	1.93	1.56	1.60	1.30	1.37	1.19	1.20	1.05	1.07
2.11	2.14	1.72	1.75	1.44	1.48	1.18	1.28	1.11	1.13	0.99	1.01
1.89	1.93	1.57	1.60	1.32	1.37	1.17	1.20	1.03	1.07	0.94	0.96
											$\gamma_1$
											0
											0.25
											0.5
											0.75
											1
											1.25
											1.5
											1.75
											2

#### 1. Stiffness Matrix

$$\begin{aligned} [N_{ij}, M_{ij}, Q_{ij}^1, Q_{ij}^2] &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} [1, z, f(z), f'(z)] dz \\ [S_{ij}^1, S_{ij}^2, S_{ij}^3, S_{ij}^4] &= \int_{-h/2}^{h/2} m_{ij} [1, f(z), f'(z), f''(z)] dz \\ [\bar{D}_x, \bar{D}_y] &= \int_{h_t,b} \cos\left(\frac{\pi z_{t,b}}{h_{t,b}}\right) [D_x, D_y] dz \\ \bar{D}_z &= \int_{h_t,b} \frac{\pi}{h_{t,b}} \sin\left(\frac{\pi z_{t,b}}{h_{t,b}}\right) D_z dz \end{aligned} \quad (21)$$

### ۲.۲.۸ کار نیروهای خارجی

بارهای خارجی سازه شامل ولتاژ اعمال شده به صفحات پیزوالکتریک فوقانی و تحتانی و بار حرارتی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_A \left( -N_{x0} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - N_{y0} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 dA \\ &+ \frac{1}{2} \int_A \left( N_x^T \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^T \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 dA \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن  $N_{x0}$  و  $N_{y0}$  ولتاژ اعمالی به صفحات در راستای محورهای x و y را نشان می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{x0} = N_{y0} = -2e_{31}\phi_0 \quad (23)$$

که در آن  $\phi_0$  ولتاژ خارجی اعمال شده به میکروصفحه می‌باشد. همچنین بار حرارتی در راستای محورهای x و y و ضریب انبساط حرارتی آلومینیوم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_x^T &= \int_{-h/2}^{h/2} [c_{11}^c + c_{12}^c] \alpha_{11} \Delta T dz \\ N_y^T &= \int_{-h/2}^{h/2} [c_{22}^c + c_{21}^c] \alpha_{22} \Delta T dz \end{aligned} \quad (24)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 23 \times 10^{-6} \text{ m/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

که با قراردادی تغییرات کار نیروهای خارجی به دست می‌آید.

### ۲.۲.۹ حل تحلیلی

معادلات به کمک روش ناویر حل می‌شوند که در آن جابه‌جایی‌ها به شکل توابعی در نظر گرفته می‌شوند که بتوانند شرایط مرزی ساده را در لبه‌های سازه برآورده کنند. لذا توابع زیر را می‌توان برای اجزای جابه‌جایی در نظر گرفت:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \phi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Psi_1 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Psi_2 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ \Phi \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

جدول ۲- مشخصات هسته لانه زنبوری.

Table 2. Honeycomb core specifications.

E GPa	$\nu$	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>
70	0.3	2702

جدول ۳- مشخصات الکترومکانیکی رویه‌های پیزوالکتریک.

Table 3. Electromechanical characteristics of piezoelectric surfaces.

Density	$5.55 \times 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
Piezoelectric Coefficient	$e_{31} = e_{32} = -2.2$	°C/m <sup>2</sup>
	$e_{15} = e_{24} = 5.8$	°C/m <sup>2</sup>
Dielectric Coefficient	$c_{11} = c_{22} = 226, c_{12} = 125$ $c_{44} = c_{55} = 44.2$ $c_{66} = 50.5$	GPa

همچنین مشخصات هندسی پیش فرض میکروصفحه به صورت جدول ۴ می‌باشد.

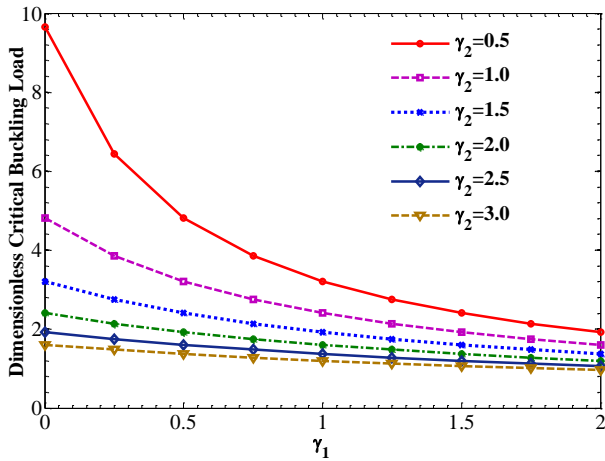
جدول ۴- مشخصات میکروصفحه.

Table 4. Microplate specifications.

Specifications	Magnitude
$l = l_1 = l_2 = l_3$	15 $\mu\text{m}$
$a = b = 10h$	510 $\mu\text{m}$
$h_c = 3l$	45 $\mu\text{m}$
$h_t = h_b$	3 $\mu\text{m}$
$\theta_0$	45°
$\gamma_0$	0.1
$\beta_0$	1
$\Delta T$	200°c

در شکل ۲ منحنی تغییرات نیروی کماتش بی بعد بر حسب تغییر دامنه بار نشان داده شده است.  $\gamma_2$  و  $\gamma_1$  مقادیر بار درون صفحه‌ای اعمال شده به ترتیب در راستای محورهای x و y می‌باشد. طبق شکل ۲، بار بحرانی کماتش بی بعد شده میکروصفحه با افزایش این دو پارامتر، کاهش می‌یابد. تنظیم هر یک از این دو پارامتر، بار اعمال شده را به حالت تک محوره تبدیل می‌کند. در واقع با اعمال کردن هر دو پارامتر

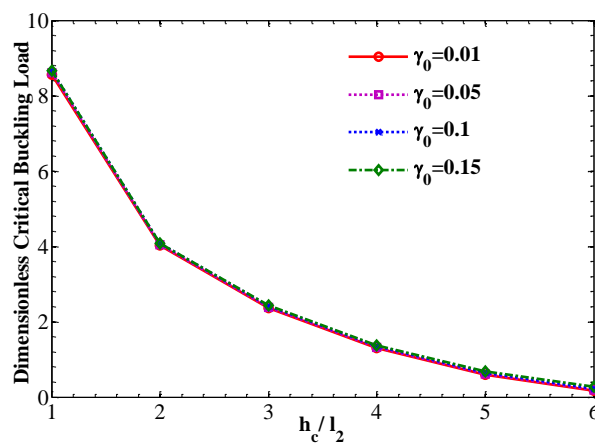
$\gamma_1$  و  $\gamma_2$ ، پایداری سازه کاهش می‌یابد. بنابراین بار کماتش بحرانی آن نیز کاهش خواهد یافت.



شکل ۲- تغییرات نیروی کماتش بی بعد بر حسب تغییر دامنه بار.

Fig. 2. Variation of dimensionless buckling force with load amplitude.

در شکل ۳ آثار تغییر یکی از مشخصات هندسی سلول‌های لانه زنبوری نمایش داده شده است. با افزایش  $\gamma_0$  (ضخامت بی بعد شده سلول‌های لانه زنبوری)، استحکام سازه افزایش می‌یابد و بر این اساس بار بحرانی کماتش نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر این تأثیر اندازه  $\frac{h_t}{l_2}$  نیز در نظر گرفته شده است. طبق شکل ۳ بار کماتش بحرانی با افزایش نسبت  $\frac{h_t}{l_2}$  کاهش می‌یابد.

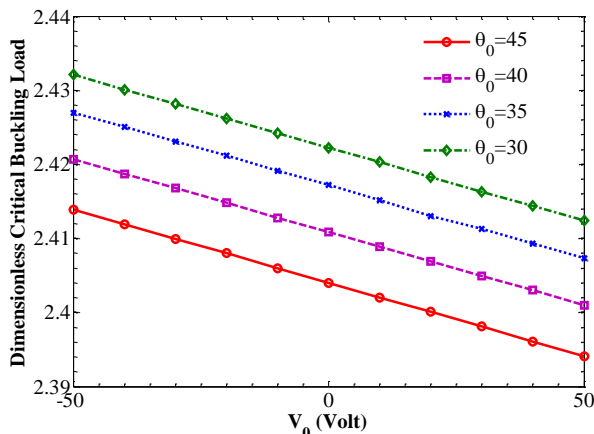


شکل ۳- تغییرات نیروی کماتش بی بعد بر حسب تغییر ضخامت هسته.

Fig. 3. Variation of dimensionless buckling force with core thickness.

شکل ۴ اثر نسبت ضخامت را بر روی بار کماتش بحرانی بی بعد شده نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت هسته ( $h_c$ ) می‌توان نرمی سازه را افزایش داد و باعث کاهش

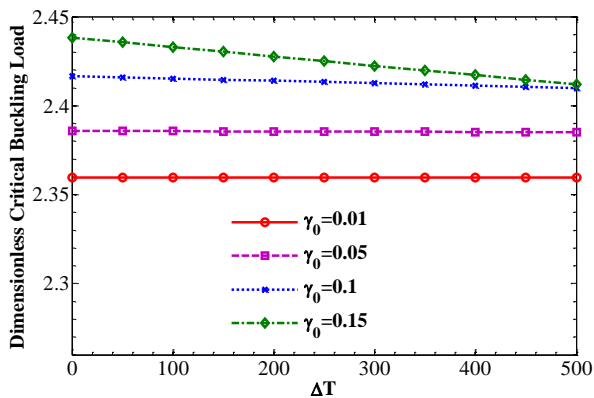
انتخابی سلول‌های لانه زنبوری بیشتر شود، بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد.



شکل ۶- نیروی کمانش بی‌بعد شده میکروصفحه (دو محوره) بر حسب تغییرات پتانسیل الکتریکی.

Fig. 6. Variation of dimensionless buckling force of microplate (biaxial) with electric potential.

در شکل ۷ نمودار تغییرات کمانش بحرانی بر حسب تغییرات دما و ضخامت هسته لانه زنبوری مشاهده می‌شود. طبق شکل ۷ با افزایش دما، مقدار بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. نرخ و شدت این کاهش دما با افزایش ضخامت بی‌بعد شده هسته لانه زنبوری افزایش می‌یابد.

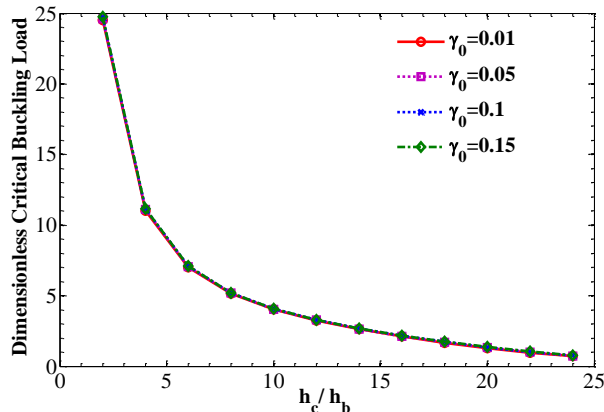


شکل ۷- تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد بر حسب تغییرات دما برای ضخامت‌های مختلف هسته لانه زنبوری.

Fig. 7. Variation of dimensionless buckling force with temperature changes for different thicknesses of honeycomb core.

در شکل ۸ نمودار تغییرات کمانش بحرانی بر حسب تغییرات دما و تغییرات زاویه داخلی سلول‌های هسته لانه زنبوری نشان داده شده‌است. همانگونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود با افزایش تغییرات دما، مقدار بار کمانش بحرانی میکروصفحه کاهش می‌یابد. همچنین هر

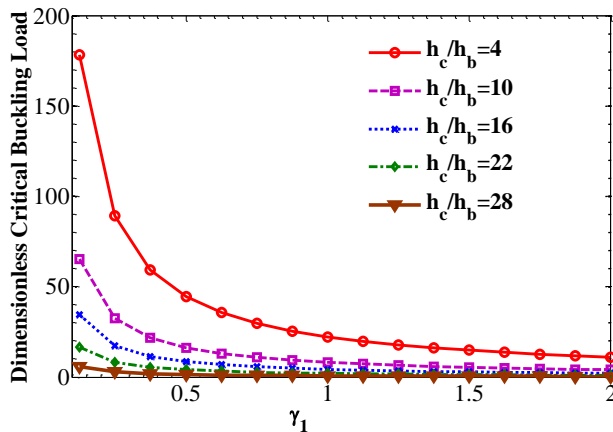
بار کمانش بحرانی بی‌بعد شده شود. شکل ۴ با ثابت در نظر گرفتن ضخامت در کل میکروصفحه رسم شده‌است.



شکل ۴- تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد بر حسب تغییر نسبت ضخامت.

Fig. 4. Variation of dimensionless buckling with thickness ratio.

شکل ۵ تأثیر همزمان نسبت ضخامت و بزرگی بار را بر روی نیروی کمانش بی‌بعد نشان می‌دهد. مشابه نمودارهای قبلی، افزایش بار در حالت کمانش تک‌محوره، منجر به کاهش بار کمانش بحرانی می‌شود. همچنین هر چه نسبت ضخامت هسته به رویه بیشتر شود، مقدار بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد.



شکل ۵- تغییرات نیروی کمانش بی‌بعد بر حسب تغییر ضخامت و بزرگی بار.

Fig. 5. Variation of dimensionless buckling force with thickness and load magnitude.

در شکل ۶ منحنی نیروی کمانش بی‌بعد شده میکروصفحه (دو محوره) بر حسب تغییرات پتانسیل الکتریکی نشان داده شده‌است. شکل ۶ نشان می‌دهد که با افزایش پتانسیل الکتریکی اعمال شده به میکروصفحه، بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. همچنین هر چه زاویه

زیادی اعمال کنند که با در نظر گرفتن این تغییرات می توان در طراحی سازه را ارتقا داد. نتایج بدست آمده به شرح زیر می باشد:

- (۱) با افزایش نسبت ضخامت هسته لانه زنبوری نسبت به پارامتر طولی، مقدار بار کمانش بحرانی کاهش می یابد.
- (۲) هر چه نسبت ضخامت هسته لانه زنبوری نسبت به ضخامت روبه ها بیشتر شود، مقدار بار کمانش بحرانی کمتری را حاصل می شود.
- (۳) با افزایش دمای سازه، بار کمانش کاسته می شود.
- (۴) هر چه زاویه داخلی سلول های هسته لانه زنبوری بیشتر باشند، بار کمانش بحرانی کمتر خواهد شد.
- (۵) با کاهش دادن ضخامت بی بعد شده سلول های لانه زنبوری بار کمانش بحرانی را می توان کاهش داد.

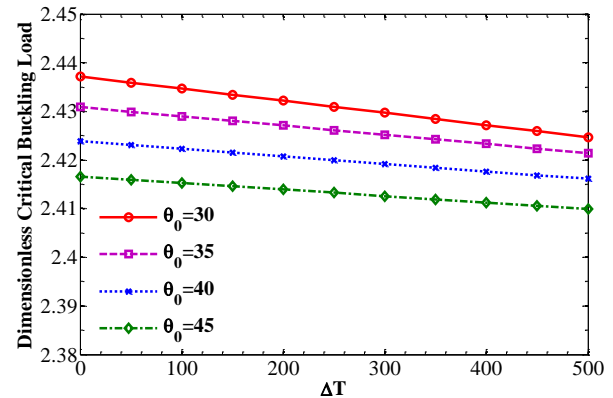
## تعارض منافع

هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

## مراجع

- [1] E. Frulloni, J. M. Kenny, and L. Torre, "Experimental study and finite element analysis of the elastic instability of composite lattice structures for aeronautic applications," *Composite Structures*, vol. 78, no. 4, pp. 519-528, 2007, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.013>.
- [2] A. Alibeigloo and A. M. Kani, "3D free vibration analysis of laminated cylindrical shell integrated piezoelectric layers using the differential quadrature method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, no. 12, pp. 4123-4137, 2010, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.04.010>.
- [3] A. Mahi, E. A. Adda Bedia, and A. Tounsi, "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 9, pp. 2489-2508, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045>.
- [4] M. H. Yas and N. Samadi, "Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 98, no. 3, pp. 119-128, 2012, <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2012.07.012>.
- [5] H. T. Thai and D. H. Choi, "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 3, pp. 1008-1022, 2012, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.062>.

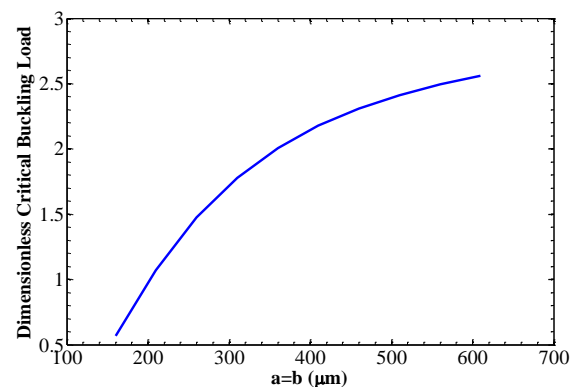
چه زاویه داخلی سلول هسته لانه زنبوری بیشتر باشد، بار کمانش بحرانی کاهش می یابد.



شکل ۸- تغییرات نیروی کمانش بر حسب تغییرات دما برای زوایای داخلی مختلف سلول های هسته لانه زنبوری.

Fig. 8. Variation of buckling force with temperature changes for different internal angles of honeycomb core cells.

همچنین بدیهی است که با کاهش مساحت میکروصفحه، مقدار بار کمانش بحرانی نیز کاهش می یابد. در شکل ۹ محور افقی ابعاد طولی و عرضی میکروصفحه را نشان می دهد که با نسبت مساوی افزایش یافته اند و متعاقباً مقدار بار کمانش بحرانی نیز افزوده شده است. لذا با توجه به این شرایط، در این مقاله ابعاد مناسب میکروصفحه ۵۱۰ میکرومتر در نظر گرفته شده است.



شکل ۹- تغییرات نیروی کمانش بی بعد بر حسب ابعاد میکروصفحه.

Fig. 9. Variation of dimensionless buckling force with microplate dimensions.

## ۵ نتیجه گیری

با تحلیل و بررسی نتایج بدست آمده از تحلیل کمانش میکروصفحه ساندویچی با هسته لانه زنبوری و روبه های پیزوالکتریک مشخص شد که پارامترهای مختلف تاثیرگذار می توانند در مقدار بار کمانش تغییرات

- Composite Materials*, vol. 24, no. 5, pp. 1251-1264, 2017, <https://doi.org/10.1007/s10443-017-9583-y>.
- [15] A. S. Sayyad and Y. M. Ghugal, "Bending, buckling and free vibration responses of hyperbolic shear deformable FGM beams," *Mechanics of Advanced Composite Structures*, vol. 5, no. 10, pp. 13-24, 2018, <https://doi.org/10.22075/mac.2018.12214.1117>.
- [16] M. Z. Kabir and B. Tavousi Tehrani, "Closed-form solution for thermal, mechanical, and thermo-mechanical buckling and post-buckling of SMA composite plates," *Composite Structures*, vol. 168, no. 6, pp. 535-548, 2017, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.046>.
- [17] R. Meksi, S. Benyoucef, A. Mahmoudi, A. Tounsi, E. A. Adda Bedia, and S. Mahmoud, "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 21, no. 2, pp. 253-262, 2019, <http://dx.doi.org/10.1177/1099636217698443>.
- [18] D. Gia Ninh, "Nonlinear thermal torsional post-buckling of carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shell with piezoelectric actuator layers surrounded by elastic medium," *Thin-Walled Structures*, vol. 123, no. 2, pp. 528-538, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.11.027>.
- [19] A. F. Radwan, "Effects of non-linear hygrothermal conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations using a hyperbolic shear deformation theory," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 21, no. 1, pp. 154-163, 2019, <https://doi.org/10.1177/1099636217693557>.
- [20] M. Sobhy and A. F. Radwan, "A new quasi 3D nonlocal plate theory for vibration and buckling of FGM nanoplates," *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 9, no. 1, pp. 586-597, 2017, <http://dx.doi.org/10.1142/S1758825117500089>.
- [21] R. Ansari, J. Torabi, and M. Faghieh Shojaei, "Buckling and vibration analysis of embedded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite annular sector plates under thermal loading," *Composites Part B: Engineering*, vol. 109, no. 7, pp. 197-213, 2017, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.050>.
- [22] M. Al-Waily, A. Abdulzahra Deli, A. D. Al-Mawash, and Z. A. Almalik Alhilo, "Effect of natural sisal fiber reinforcement on the composite plate buckling behavior," *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, vol. 68, no. 2, pp. 186-197, 2017.
- [6] M. Rafiee, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Thermal bifurcation buckling of piezoelectric carbon nanotube reinforced composite beams," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 7, pp. 1147-1160, 2013, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.031>.
- [7] B. Sidda Reddy, J. Suresh Kumar, C. Eswara Reddy, and K. Vijaya Kumar Reddy, "Buckling analysis of functionally graded material plates using higher order shear deformation theory," *Journal of Composites*, vol. 4, no. 2, pp. 1-12, 2013, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/808764>.
- [8] H. Yaghoobi and P. Yaghoobi, "Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach," *Meccanica*, vol. 48, no. 8, pp. 2019-2035, 2013, <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-013-9720-0>.
- [9] B. Zhang, Y. He, D. Liu, Z. Gan, and L. Shen, "Size-dependent functionally graded beam model based on an improved third-order shear deformation theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 47, no. 5, pp. 211-230, 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.04.009>.
- [10] S. C. White, P. M. Weaver, and K. C. Wu, "Post-buckling analyses of variable-stiffness composite cylinders in axial compression," *Composite Structures*, vol. 123, no. 4, pp. 190-203, 2015, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.12.013>.
- [11] H. Debski, A. Teter, T. Kubiak, and S. Samborski, "Local buckling, post-buckling and collapse of thin-walled channel section composite columns subjected to quasi-static compression," *Composite Structures*, vol. 136, no. 2, pp. 593-601, 2016, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.008>.
- [12] H. Debski, A. Teter, T. Kubiak, and S. Samborski, "Local buckling and post-buckling of composite channel-section beams – numerical and experimental investigation," *Composites Part B: Engineering*, vol. 91, no. 8, pp. 176-188, 2016, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.01.053>.
- [13] J. Yang, H. Wu, and S. Kitipornchai, "Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams," *Composite Structures*, vol. 161, no. 6, pp. 111-118, 2017, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.048>.
- [14] P. Rozylo, A. Teter, H. Debski, P. Wyslowski, and K. Falkowicz, "Experimental and numerical study of the buckling of composite profiles with open cross section under axial compression," *Applied*

- [31] S. Mitao, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Bending and buckling analyses of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets," *Composites Part B: Engineering*, vol. 134, no. 4, pp. 106-113, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.09.043>.
- [32] H. Safarpour, Z. Esmailpoor Hajilak, and M. Habibi, "A size-dependent exact theory for thermal buckling, free and forced vibration analysis of temperature dependent FG multilayer GPLRC composite nanostructures resting on elastic foundation," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 15, no. 3, pp. 569-583, 2019, <https://doi.org/10.1007/s10999-018-9431-8>.
- [33] S. Zghal, A. Frikha, and F. Dammak, "Mechanical buckling analysis of functionally graded power-based and carbon nanotubes-reinforced composite plates and curved panels," *Composites Part B: Engineering*, vol. 150, no. 6, pp. 165-183, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.05.037>.
- [34] S. Alimirzaei, M. Mohammadimehr, and A. Tounsi, "Nonlinear analysis of viscoelastic micro-composite beam with geometrical imperfection using FEM: MSGT electro-magneto-elastic bending, buckling and vibration solutions," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 71, no. 5, pp. 485-502, 2019, <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2019.71.5.485>.
- [35] K. Mehar, S. Kumar Panda, Y. Devarajan, and G. Choubey, "Numerical buckling analysis of graded CNT-reinforced composite sandwich shell structure under thermal loading," *Composite Structures*, vol. 216, no. 2, pp. 406-414, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.002>.
- [36] S. E. Kim, N. D. Duc, V. H. Nam, and N. Van Sy, "Nonlinear vibration and dynamic buckling of eccentrically oblique stiffened FGM plates resting on elastic foundations in thermal environment," *Thin-Walled Structures*, vol. 142, no. 3, pp. 287-296, 2019, <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2019.05.013>.
- [37] M. Sobhy and A. M. Zenkour, "Porosity and inhomogeneity effects on the buckling and vibration of double-FGM nanoplates via a quasi-3D refined theory," *Composite Structures*, vol. 220, no. 6, pp. 289-303, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.096>.
- [38] M. Arefi and M. Meskini, "Application of hyperbolic shear deformation theory to free vibration analysis of functionally graded porous plate with piezoelectric face-sheets," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 71, no. 5, pp. 459-
- [23] M. Sobhy and A. M. Zenkour, "Porosity and inhomogeneity effects on the buckling and vibration of double-FGM nanoplates via a quasi-3D refined theory," *Composite Structures*, vol. 220, no. 2, pp. 289-303, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.096>.
- [24] K. Gao, W. Gao, D. Wu, and C. Song, "Nonlinear dynamic buckling of the imperfect orthotropic E-FGM circular cylindrical shells subjected to the longitudinal constant velocity," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 138-139, no. 3, pp. 199-209, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.02.013>.
- [25] Z. Wang, Q. Han, D. H. Nash, P. Liu, and D. Hu, "Investigation of imperfect effect on thermal buckling of cylindrical shell with FGM coating," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 69, no. 5, pp. 221-230, 2018, <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.01.004>.
- [26] V. Do, V. Nguyen, and C. H. Lee, "Quasi-3D higher-order shear deformation theory for thermal buckling analysis of FGM plates based on a meshless method," *Aerospace Science and Technology*, vol. 82-83, no. 2, pp. 450-465, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.09.017>.
- [27] P. H. Cong, T. M. Chien, N. D. Khoa, and N. D. Duc, "Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT," *Aerospace Science and Technology*, vol. 77, no. 8, pp. 419-428, 2018, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2018.03.020>.
- [28] A. K. Chaubey, I. Jha, A. Kumar, M. D. Demirbas, and S. Dey, "Dual-axis buckling of laminated composite skew hyperbolic paraboloids with openings," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 40, no. 10, pp. 548-560, 2018, <http://dx.doi.org/10.1007/s40430-018-1406-z>.
- [29] J. H. S. Almeida, M. L. P. Tonatto, M. L. Ribeiro, V. Tita, and S. C. Amico, "Buckling and post-buckling of filament wound composite tubes under axial compression: Linear, nonlinear, damage and experimental analyses," *Composites Part B: Engineering*, vol. 149, no. 2, pp. 227-239, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.05.004>.
- [30] Y. Wang, C. Feng, Z. Zhao, and J. Yang, "Buckling of graphene platelet reinforced composite cylindrical shell with cutout," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 18, no. 3, pp. 356-372, 2018, <http://dx.doi.org/10.1142/S0219455418500402>.

- [47] D. M. Li, C. A. Featherston, and Z. Wu, "An element-free study of variable stiffness composite plates with cutouts for enhanced buckling and post-buckling performance," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 371, no. 3, pp. 313-314, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113314>.
- [48] K. Jermstiparsert *et al.*, "Critical voltage, thermal buckling and frequency characteristics of a thermally affected GPL reinforced composite microdisk covered with piezoelectric actuator," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 50, no. 4, pp. 1331-1353, 2020, <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1748052>.
- [49] M. Al-Waily, M. A. Al-Shammari, and M. J. Jweeg, "An analytical investigation of thermal buckling behavior of composite plates reinforced by carbon nano particles," *Engineering Journal*, vol. 24, no. 3, pp. 11-21, 2020, <https://doi.org/10.4186/ej.2020.24.3.11>.
- [50] A. Davar, M. Heydari Beni, and R. Azarafza, "Free vibration analysis of cylindrical sandwich shells with FML face and functionally graded core using a new shell theory," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, vol. 7, no. 4, pp. 35-49, 2023, (in Persion), <https://doi.org/10.30699/jtae.2023.7.4.4>.
- [51] R. Maboodi, H. Shokrollahi, and M. Esmaeili, "Flutter analysis of a CNT-reinforced composite beam carrying an attached mass in the supersonic flow," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, vol. 7, no. 1, pp. 57-67, 2023, (in Persion), <https://doi.org/10.30699/jtae.2023.7.1.6>.
- [52] H. T. Thai and D. H. Choi, "Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 83, no. 4, pp. 1755-1771, 2013, <http://dx.doi.org/10.1007/s00419-013-0776-z>.
- [53] D. O. Brush, B. O. Almroth, and J. W. Hutchinson, "Buckling of bars, plates, and shells," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 19, no. 9, pp. 1183-1223, 1981, <https://doi.org/10.1115/1.3423755>.
- [54] K. Torabi, H. Afshari, and F. H. Aboutalebi, "Vibration and flutter analyses of cantilever trapezoidal honeycomb sandwich plates," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 21, no. 8, pp. 2887-2920, 2017, <http://dx.doi.org/10.1177/1099636217728746>.
- [55] K. B. Shingare and S.I. Kundalwal, "Static and dynamic response of graphene nanocomposite plates 467, 2019, <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2019.71.5.459>.
- [39] T. N. Nguyen, C. H. Thai, H. Nguyen-Xuan, and J. Lee, "NURBS-based analyses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shells," *Composite Structures*, vol. 347, no. 2, pp. 983-1003, 2019, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.01.011>.
- [40] M. Habibi, M. Alireza, S. Hamed, and M. and Ghadiri, "Effect of porosity on buckling and vibrational characteristics of the imperfect GPLRC composite nanoshell," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 49, no. 6, pp. 1-30, 2019, <http://dx.doi.org/10.1080/15397734.2019.1701490>.
- [41] S. Rosalin and B. Nath Singh, "Assessment of inverse hyperbolic zigzag theory for buckling analysis of laminated composite and sandwich plates using finite element method," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 91, no. 1, pp. 169-186, 2021, <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01761-9>.
- [42] M. Malikan and V. A. Eremeyev, "A new hyperbolic-polynomial higher-order elasticity theory for mechanics of thick FGM beams with imperfection in the material composition," *Composite Structures*, vol. 249, no. 6, pp. 223-263, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112486>.
- [43] M. Bouazza and A. M. Zenkour, "Hygro-thermo-mechanical buckling of laminated beam using hyperbolic refined shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 252, no 1, pp. 112-189, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112689>.
- [44] A. Balakrishna, P. Dash, and B. N. Singh, "Buckling analysis of porous FGM sandwich plates under various types nonuniform edge compression based on higher order shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 251, no. 2, pp. 112-197, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112597>.
- [45] R. Moradi-Dastjerdi, K. Behdinan, B. Safaei, and Z. Qin, "Buckling behavior of porous CNT-reinforced plates integrated between active piezoelectric layers," *Engineering Structures*, vol. 222, 2020, Art. no. 111141, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111141>.
- [46] Y. Yuan, K. Zhao, Y. Zhao, S. Sahmani, and B. Safaei, "Couple stress-based nonlinear buckling analysis of hydrostatic pressurized functionally graded composite conical microshells," *Mechanics of Materials*, vol. 148, 2020, Art. no. 103507, <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103507>.

- stretching effect," *Composite Structures*, vol. 258, no. 3, pp. 123-136, 2021, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113430>.
- [59] E. Arshid *et al.*, "Static and dynamic analyses of FG-GNPs reinforced porous nanocomposite annular micro-plates based on MSGT," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 180, no. 4, pp. 221-238, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105656>.
- [60] C. H. Zhang and A. Eyvazian, "Modified couple stress theory application to analyze mechanical buckling behavior of three-layer rectangular microplates with honeycomb core and piezoelectric face sheets," *Composite Structures*, vol. 292, no. 7, pp. 145-158, 2022, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115582>.
- with flexoelectric effect," *Mechanics of Materials*, vol. 134, no. 4, pp. 69-84, 2019, <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.04.006>.
- [56] Z. Q. Lu, F. Y. Zhang, H. L. Fu, H. Ding, and L. Q. Chen, "Rotational nonlinear double-beam energy harvesting," *Smart Materials and Structures*, vol. 31, no. 2, pp. 136-147, 2021, <http://dx.doi.org/10.1088/1361-665X/ac4579>.
- [57] M. Arefi, M. R. Bidgoli, and T. Rabczuk, "Thermo-mechanical buckling behavior of FG GNP reinforced micro plate based on MSGT," *Thin-Walled Structures*, vol. 142, no. 6, pp. 444-459, 2019, <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2019.04.054>.
- [58] M. Khorasani, Z. Soleimani-Javid, E. Arshid, L. Lampani, and Ö. Civalek, "Thermo-elastic buckling of honeycomb micro plates integrated with FG-GNPs reinforced epoxy skins with