



Original Research Paper

Analysis of Buckling and Postbuckling of Laminated Composites Embedded with Shape Memory Alloy Fibers Using the Finite Strip Method

Saeid Nasiry *  and Hamid Reza Ovesy 

Faculty of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History:

Received 28 October 2025

Revised 05 January 2026

Accepted 05 January 2026

Available Online 28 January 2026

Keywords:

Buckling and post-buckling

Composite plate

Shape memory alloy

Finite strip method

Zig-zag displacement theory

ABSTRACT

Using the semi-analytical finite strip method, this study investigates the buckling and postbuckling behavior of laminated composite plates embedded with shape memory alloy (SMA) fibers under uniform thermal loading. The primary objective is to examine the influence of SMA fiber placement on the structural response of the plate. The finite strip method employs trigonometric functions, allowing the energy integral to be evaluated analytically. The zig-zag displacement deformation theory, based on Reddy's layerwise approach, is implemented in conjunction with the nonlinear von Kármán compatibility relations. The solution methodology relies on minimizing the total potential energy and solving either an eigenvalue problem or a system of nonlinear equations using the incremental-iterative Newton-Raphson method. By adopting a simplified one-dimensional Brinson model, the effects of SMA fibers including pre-strain at various volume fractions on the buckling and postbuckling behavior of composite plates are thoroughly analyzed. Drawing on previous research and existing literature, the finite strip method is applied accurately, and significant findings are obtained.

* Corresponding Author's E-mail: saeed.nasiry@aut.ac.ir**How to Cite this Article:**

H. R. Ovesy and S. Nasiry, "Analysis of buckling and postbuckling of laminated composites embedded with shape memory alloy fibers using the finite strip method," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 57-70, 2026, (in Persian), <https://doi.org/1022034/jtae.10.3.5>.

**COPYRIGHTS**

© 2026 by the authors. Published by ARI. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)





تحلیل کمانش و پس کمانش کامپوزیت‌های لایه‌ای حاوی فبر آلایژهای حافظه‌دار با استفاده از روش نوار محدود

سعید نصیری^{۱*} و حمیدرضا اویسی^۲^۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران^۲- استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده

با استفاده از روش نوارمحدود نیمه‌تحلیلی، کمانش و پس‌کمانش صفحات کامپوزیتی لایه‌ای تقویت شده با آلایژهای حافظه‌دار که تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت قرار دارند، بررسی می‌شود. هدف اصلی بررسی تأثیر قرارگیری الیاف حافظه‌دار در رفتار صفحه می‌باشد. در روش نوارمحدود به دلیل اعمال توابع مثلثاتی می‌توان انتگرال انرژی را به صورت تحلیلی محاسبه کرد. تئوری تغییر شکل جابه‌جایی زیگ-زاگ لایروایز همراه با روابط سازگاری غیرخطی فون کارمن اجرا شده است. روش حل بر اساس به حداقل رساندن انرژی پتانسیل کل و حل مسئله مقدار ویژه یا مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی با استفاده از روش نیوتن-رافسون تکراری-افزایشی است. با استفاده از مدل برینسون ساده شده یک بعدی، تأثیر الیاف حافظه‌دار (اثرات پیش‌کرنش در نسبت‌های حجمی مختلف) بر کمانش و پس‌کمانش صفحات کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استناد به کارهای دیگران و مطالعات پیشین روش نوار محدود به درستی اعمال گردیده است و نتایج مهمی به دست آمده است.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۰۶ آبان ۱۴۰۴
بازنگری ۱۵ دی ۱۴۰۴
پذیرش ۱۵ دی ۱۴۰۴
اولین انتشار ۰۸ بهمن ۱۴۰۴

واژه‌های کلیدی:

کمانش و پس‌کمانش
صفحات کامپوزیتی
آلایژهای حافظه‌دار
روش نوارمحدود
تئوری جابه‌جایی زیگ-زاگ

پست الکترونیکی نویسنده مسئول: saeed.nasiry@aut.ac.ir

How to Cite this Article:

H. R. Ovesy and S. Nasiry, "Analysis of buckling and postbuckling of laminated composites embedded with shape memory alloy fibers using the finite strip method," *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 57-70, 2026, (in Persian), <https://doi.org/10.22034/jtae.10.3.5>.

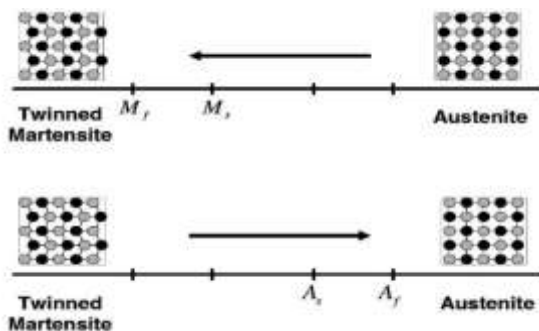


COPYRIGHTS

© 2026 by the authors. Published by ARI. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [The Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



تبدیل به مارتنزیت کامل می‌شود. توجه داشته باشید که تمام این دماهای تبدیل با تنش اعمالی افزایش خواهند یافت. در اکثر اوقات ترتیب این دماهای شاخص به صورت $M_f < M_s < A_s < A_f$ می‌باشد (شکل ۱).



شکل ۱- تبدیل فازی بدون تنش و دماهای تبدیل [۳].

Fig. 1. Stress-free phase transformation and transformation temperatures [3].

مواد SMAها چند ویژگی اساسی دارند که آن‌ها را نسبت به آلیاژهای دیگر متمایز می‌کند، این ویژگی‌ها عبارت‌اند از:

اثر حافظه‌داری: اگر ماده در فاز مارتنزیت در اثر بار تغییر فاز مارتنزیتی دهد و باربرداری شود کرنش پسماند در آلیاژ باقی می‌ماند، در اثر افزایش دما آلیاژ به فاز آستنیت رسیده و در ناحیه کاملاً آستنیت کرنش پسماند از بین خواهد رفت ولی ساختار کریستالی ماده تغییر نخواهد کرد که با سرد کردن ماده (در حالت تنش صفر) به ساختار کریستالی مارتنزیتی اولیه بر می‌گردد که به مجموعه کل این تغییرات اثر حافظه‌داری می‌گویند.

اثر فوق‌الاستیک: در بارگذاری در دماهای ثابت و بالای دمای پایان آستنیت، به‌طوری‌که ماده از ناحیه الاستیک عبور کند، کرنش ایجاد شده در ماده در باربرداری کاملاً از بین می‌رود.

اثر شبه‌الاستیک: در دماهای بین تبدیل فازی، برخلاف حالت فوق‌الاستیک قسمتی از کرنش ایجاد شده برمیگردد و قسمتی دیگر باقی می‌ماند.

اسدی و همکاران [۴] پایداری حرارتی غیرخطی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای تقویت شده با الیاف SMA را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تیموشنکو بررسی کردند. در این تحقیق از معادله سازگاری ترمومکانیکی یک‌بعدی برینسون استفاده شده است.

ارتعاشات آزاد صفحات با لایه‌چینی متقاطع و زاویه‌ای تقویت شده توسط الیاف SMA و اثر کسر حجمی و پیش‌کرنش الیاف SMA

۱. مقدمه

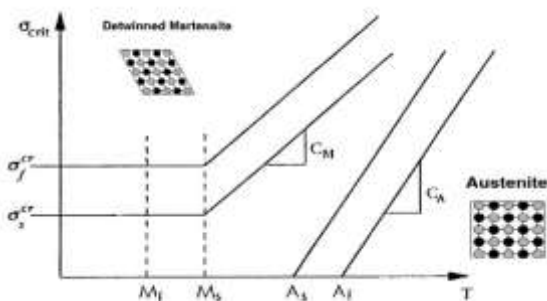
به‌عنوان یک تعریف کلی می‌توان گفت که مواد هوشمند به دسته‌ای از مواد اطلاق می‌شوند که همانند یک موجود زنده توانایی درک محیط و شرایط اطراف خود را داشته و به‌صورت خودکار نسبت به آن واکنشی مناسب نشان دهند. یکی از پرکاربردترین انواع مواد هوشمند، آلیاژهای حافظه‌دار^۱ نام دارند این مواد آلیاژهای ویژه‌ای هستند که از فلزاتی همچون مس، روی، آلومینیوم، نیکل، تیتانیوم، آهن و غیره ساخته شده‌اند و می‌توانند تغییر شکل‌های بزرگ را که بر آن‌ها اعمال می‌شوند را با حرارت‌دهی و یا حذف تنش‌های اعمالی بازیابی کرده و به شکل اولیه خود بازگردند [۱].

در دهه ۱۸۹۰ میلادی آدولف مارتنز با معرفی ساختار فلزی در انواع مختلف فولاد، که بعدها به ساختار مارتنزیتی^۲ مشهور شد قدم عمده‌ای در کشف آلیاژهای حافظه‌دار برداشت. مطالعات آدولف مارتنز را می‌توان اولین قدم در کشف آلیاژهای حافظه‌دار و خواص آن به‌شمار آورد.

پس از حدود سه دهه در سال ۱۹۳۲م، آرنه اولاندر دانشمند سوئدی برای نخستین بار رفتار ابرکشسان را در آلیاژ طلا-کادمیم (Au-Cd) مشاهده کرد. سپس در ۱۹۳۸م، آلدن بوکانان گرینگر و ویکتور جرج مورادیان آمریکایی وابستگی فاز مارتنزیت به دما را در آلیاژ مس-روی (Cu-Zn) کشف کردند و سرانجام سازوکار و مفهوم دقیقی از استحاله مارتنزیتی و اثر حافظه‌داری در ۱۹۵۱م. توسط لوچینگ چانگ و تام ریدر، با مطالعه دقیق‌تر بر روی آلیاژ طلا-کادمیم (Au-Cd) ارائه شد [۲]. با این‌حال، نقطه عطف مطالعات و پژوهش‌های انجام گرفته بر روی آلیاژهای حافظه‌دار را می‌توان کشف اثر حافظه‌داری آلیاژ نیکل-تیتانیوم در ۱۹۶۷م. توسط ویلیام جیمز بوهرلر آمریکایی و همکاران او در آزمایشگاه مهمات نیروی دریایی ایالات متحده آمریکا دانست [۳].

مواد آلیاژ حافظه‌ای دو فاز اصلی دارند که ساختار کریستالی متفاوتی دارند. یکی مارتنزیت نام دارد که در دماهای پایین و تنش‌های زیاد پایدار است و دیگری آستنیت^۳ که در دماهای بالا و تنش‌های کم پایدار است. در تبدیلات فازی SMAها چهار دمای شاخص وجود دارد که در آن تبدیل فاز رخ می‌دهد: ۱-دمای آغاز آستنیت (A_s)، جایی که ماده شروع به تبدیل از مارتنزیت دوقلوی به آستنیت می‌کند، ۲-دمای پایان آستنیت (A_f)، که در آن ماده کاملاً به آستنیت تبدیل می‌شود. ۳-دمای آغاز مارتنزیت (M_s)، جایی که آستنیت شروع به تبدیل شدن به مارتنزیت دوقلوی می‌کند، ۴-دمای پایان مارتنزیت (M_f)، جایی که

دمای شروع فاز مارتنزیت (M_s) نیز رفتار دقیق‌تری پیش‌بینی می‌کند.



شکل ۲- پروفیل دما-تنش مدل برینسون [۳].

Fig. 2. Temperature-stress profile of the Brinson model [3].

در نمودار شکل ۲ خطوط رسم شده مرز ناحیه‌های تبدیل ساختار آلیاژ SMA را نمایش می‌دهند. در نهایت معادله رفتاری به صورت معادله ۲ تعریف گردید:

$$\sigma - \sigma_0 = E(\xi) \varepsilon - E(\xi_0) \varepsilon_0 + \Omega(\xi) \xi_s - \Omega(\xi_0) \xi_{s_0} + \theta(T - T_0) \quad (2)$$

ε_0 کرنش اولیه SMA و θ بیانگر ضریب انبساط حرارتی و Ω نیز تانسور تغییر فاز می‌باشد. معادلات تغییر فاز در دماها و تنش‌های مختلف نیز به صورت روابط ۳ تا ۶ می‌باشند [۹]:

تغییر فاز به مارتنزیت:

$$T > M_s, \sigma_f^{cr} + C_M(T - M_s) < \sigma < \sigma_s^{cr} + C_M(T - M_s) \\ \xi_s = \frac{1 - \xi_{s_0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}} [\sigma - \sigma_f^{cr} - C_M(T - M_s)] \right\} + \frac{1 + \xi_{s_0}}{2} \quad (3) \\ \xi_r = \xi_{r_0} - \frac{\xi_{r_0}}{1 - \xi_{s_0}} (\xi_s - \xi_{s_0})$$

دماهای تبدیل در شکل ۲ نمایش داده شده است.

$$T < M_s, \sigma_s^{cr} < \sigma < \sigma_f^{cr} \\ \xi_s = \frac{1 - \xi_{s_0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s^{cr} - \sigma_f^{cr}} [\sigma - \sigma_f^{cr}] \right\} + \frac{1 + \xi_{s_0}}{2} \quad (4) \\ \xi_r = \xi_{r_0} - \frac{\xi_{r_0}}{1 - \xi_{s_0}} (\xi_s - \xi_{s_0}) + \Delta_{T\xi}$$

مقدار $\Delta_{T\xi}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{if } \rightarrow M_f < T < M_s, T < T_0 \\ \Delta_{T\xi} = \frac{1 - \xi_{r_0}}{2} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{M_s - M_f} (T - M_f) \right] + 1 \right\} \quad (5) \\ \text{else } \rightarrow \Delta_{T\xi} = 0$$

توسط شیو و همکاران [۵] مورد مطالعه قرار گرفت. کبیر و همکاران [۶] یک راه حل تحلیلی را برای تعیین اثر SMA بر پس کمانش صفحه کامپوزیت چند لایه تحت بارهای حرارتی-مکانیکی مختلف انجام دادند.

با استفاده از یک مدل سه بعدی لایروایز، کومار و همکارانش [۷] کمانش حرارتی صفحات در معرض توزیع دمایی یکنواخت را بررسی کردند.

مطالعات زیادی برای بررسی پایداری صفحات تقویت شده با الیاف آلیاژهای حافظه‌دار تحت بارگذاری حرارتی وجود دارد در حالی که مطالعات انگشت شماری برای بارگذاری مکانیکی می‌توان یافت. در سال ۲۰۱۱، شائو و همکارانش [۸] تاثیر آلیاژهای حافظه‌دار را بر روی لایه-چینی زاویه‌ای و متعام متقارن تحت بار محوری مکانیکی و با روش اجزاء محدود بررسی کردند.

در تحقیق حاضر از روش عددی نوار محدود بر پایه تئوری جابه‌جایی زیگ-زاگ لایروایز برای مطالعه کمانش و پس کمانش صفحات کامپوزیتی در کسرهای حجمی متفاوت از الیاف SMA و همچنین شرایط مرزی مختلف استفاده شده است.

۲. صفحات کامپوزیتی حاوی الیاف آلیاژهای حافظه‌دار

برای کاربردهای مختلف، درک دقیق رفتار مکانیکی SMAها به منظور توسعه و بهره برداری کامل از پتانسیل آنها ضروری است، پس قبل از استخراج روابط کمانش و پس کمانش، رفتار مکانیکی-حرارتی یک بعدی آلیاژهای حافظه‌دار توسعه داده شده توسط برینسون [۹] مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲-۱ معادلات رفتاری و تغییر فاز

بر اساس معادلات استخراج شده از قوانین ترمومکانیک و نامساوی کلازیوس دوهم در مطالعات پیش‌تر از برینستون، رفتار ترمومکانیکی یک بعدی آلیاژ حافظه‌ای توسط پارامترهای (ε, T, ξ) که به ترتیب کرنش گرین، دما و کسر مارتنزیتی هستند، بیان گردیده بود. مطالعات تا این مرحله، متغیر حالت داخلی برای کسر ماده مارتنزیت ξ ، به سادگی نشان‌دهنده درصد ماده تبدیل شده به مارتنزیت در نظر گرفته شده بود [۹] ولی طبق مدل برینسون، کسر ماده مارتنزیت ξ به دو قسمت تقسیم می‌شود.

$$\xi = \xi_s + \xi_r \quad (1)$$

به ترتیب ξ_r بیانگر کسر مارتنزیت دمایی و ξ_s کسر مارتنزیت تنشی می‌باشد و مجموع آنها، عددی بین صفر تا یک است. با تعریف جدیدی از کسر مارتنزیت معادله رفتاری برای دماهای پایین‌تر از

تغییر فاز به آستنیت:

$$T > A_s, C_A (T - A_f) < \sigma < C_A (T - A_s)$$

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{A_f - A_s} \left(T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\}$$

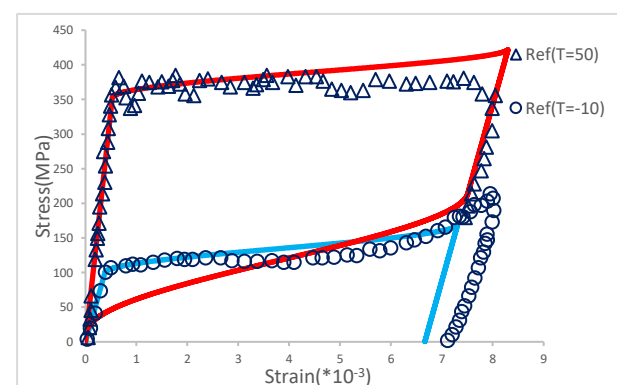
$$\xi_s = \xi_s - \frac{\xi_s}{\xi_0} (\xi_0 - \xi)$$

در روابط فوق T, σ و ξ به ترتیب بیانگر دما، تنش و نسبت مارتنزیتی آلیاژ حافظه‌دار هستند و اندیس‌های زیر نویس صفر مربوط به شرایط اولیه آلیاژ می‌باشد و بقیه متغیرها در جدول ۱- تعریف شده‌اند. معادله ۲ به همراه معادلات تبدیل فازی ۳ تا ۶ کوپله هستند و با حل کوپل شده این روابط می‌توان نمودارهای تنش- کرنش و دیگر نمودارها را ترسیم کرد. در جدول ۱- مشخصات آلیاژ نایتینول منبع [۹] ذکر شده و از این داده‌ها برای رسم نمودارها استفاده شده است.

جدول ۱- مشخصات نایتینول [۹].

Table 1- Properties of Nitinol [9].

Young's Modulus	Phase Transformation Temperatures	Conversion Constants	Residual Strain
$E_a=67$ GPa $E_m=26.3$ GPa $\Theta=0.55$ MPa/°C	$M_f=9$ °C $M_s=18.4$ °C $A_s=34.5$ °C $A_f=49$ °C	$C_M=8$ MPa/°C $C_A=13.5$ MPa/°C $\sigma_s^{cr}=100$ MPa $\sigma_f^{cr}=170$ MPa	$\epsilon_L=0.067$



شکل ۳- نمودار تنش- کرنش الیاف SMA.

Fig. 3. Stress-strain curve of SMA fibers.

در شکل ۳، نقاط توخالی معرف نمودارهای رسم شده با نتایج آزمایشگاهی منبع [۱۰] می‌باشند. با توجه به دماهای تبدیل در جدول ۱ برای دمای ۵۰ درجه که بالاتر از دمای فاز پایانی آستنیت است اثر

فوق الاستیک قابل مشاهده هست که مقدار کرنش پسماند در نهایت صفر شده است ولی برای دمای پایین‌تر از A_s مقداری کرنش پسماند وجود دارد که نشان دهنده اثر شبه‌فوق الاستیک می‌باشد. این کرنش پسماند در حالت بدون تنش با اعمال بار حرارتی و افزایش دما تا بالای دمای A_f از بین می‌رود.

۲-۲ خواص مکانیکی معادل لایه‌های دارای SMA

رویکردهای متفاوتی برای تعیین خواص معادل مکانیکی و حرارتی صفحات کامپوزیتی وجود دارد. از جمله این رویکردها می‌توان به رویکرد مقاومت مصالح، مدل‌های نیمه تجربی و مدل‌های الاستیسیته سه‌بعدی اشاره کرد. چون خواص آلیاژهای حافظه‌دار به شدت تابع دما می‌باشد در مراجع مختلف از مدل‌های میکرومکانیک شبکه‌ای [۱۱] استفاده شده است که در معادلات ۷، ۸ و ۹ ذکر شده‌اند.

$$E_{11} = E_s (\xi) V_s + E_m (1 - V_s)$$

$$E_{22} = E_m \left[(1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_m}{E_s (\xi)} \right)} \right]$$

$$G_{12} = G_m \left[(1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{G_m}{G_s (\xi)} \right)} \right]$$

(۷)

$$v_{12} = v_{12s} V_s + v_{12m} (1 - V_s)$$

$$\alpha_1 = \frac{V_s \alpha_s E_s (\xi) + (1 - V_s) \alpha_m E_m}{E_{11}}$$

$$\alpha_2 = \frac{E_{2m}}{E_{22}} \left[\alpha_{2m} (1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\alpha_{2m} \sqrt{V_s} V_s (\alpha_{2m} - \alpha_s)}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_{2m}}{E_{22}} \right)} \right]$$

(۸)

V_s, E_s و G_s به ترتیب بیانگر نسبت حجمی، مدول یانگ و مدول برشی الیاف SMA در هر لایه کامپوزیتی می‌باشند. α و v نیز بیانگر ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون می‌باشند که اعداد زیر نویس نشان دهنده خواص در جهات مختلف هستند. عدد ۱ نشان دهنده جهت الیاف و ۲ جهت عمود بر الیاف می‌باشد. زیر نویس m خواص ماتریس صفحه را بیان می‌کند.

مقدار مدول یانگ و مدول برشی الیاف SMA نیز از معادله ۹ به دست می‌آید: [۱۲]:

$$G_s (\xi) = \frac{E_s (\xi)}{2(1 + v_{12})}$$

$$E_s (\xi) = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1 \right) \xi}$$

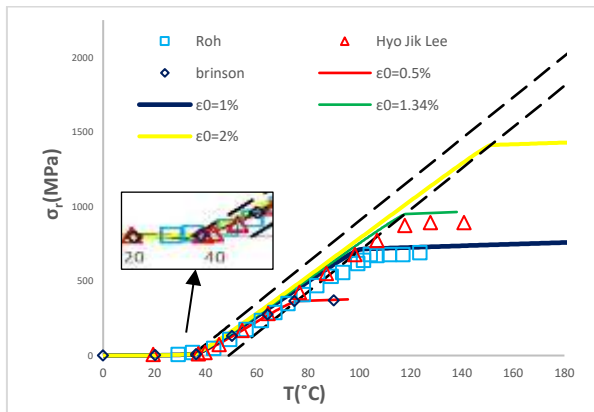
(۹)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_0 + \theta(A_s^\sigma - T_0) \\ \sigma_2 &= \sigma_1 + [E_A - E_s(\xi_0)]\varepsilon_0 + \Omega(\xi_0)\xi_{s0} + \theta(A_f^\sigma - A_s^\sigma)\end{aligned}\quad (11)$$

چون ماده در حالت ابتدایی دارای کرنش پسماند ناشی از تغییر فاز مارتنزیتی می‌باشد پس مقدار ابتدایی کسر مارتنزیت صفر نیست. مقدار مارتنزیت تنش ξ_{s0} از رابطه $\xi_{s0} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_L}$ به دست می‌آید. در روابط فوق زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned}A_s^\sigma &= \frac{a_s A_s + b_s (\theta T - \sigma_0)}{a_s + b_s \theta} \\ A_f^\sigma &= \frac{a_s A_s + \pi - b_s \{ [E_A - E_s(\xi_0)]\varepsilon_0 - \Omega(\xi_0)\xi_{s0} + \sigma_0 - \theta T_0 \}}{a_s + b_s \theta}\end{aligned}\quad (12)$$

نمودار تنش‌بازیابی بر حسب دما با استفاده از معادله ۱۰ در شکل ۴ رسم گردیده است.



شکل ۴- نمودار تنش بازیابی در پیش کرنش‌های مختلف.

Fig. 4. Recovery stress diagram at different pre-strains.

در شکل ۴، برای پیش کرنش‌های متفاوت نمودار تنش بازیابی رسم شده است و با نتایج رو و همکاران [۱۳]، لی [۱۴] و برینسون [۹] نیز مقایسه گردیده است. با توجه به نمودار در دماهای قبل از شروع تغییر فاز به آستنیت مقدار محسوسی تنش بازیابی نیز تولید می‌شود که این تغییرات بین دمای شروع و پایان فاز آستنیت به شدت افزایشی می‌باشد و در ناحیه کاملاً آستنیت این تغییرات بسیار اندک و تقریباً ثابت باقی می‌ماند. پارامتر کسر مارتنزیتی نیز با تغییرات دما، مقدار آن تغییر پیدا می‌کند. اکنون که مقدار تنش به ازای هر دما مشخص است می‌توان از معادله ۱۰ مقدار آن را به دست آورد که در شکل ۵ این نتایج رسم شده است.

با توجه به نمودار شکل ۵، تغییر نسبت مارتنزیتی در پیش کرنش‌های مختلف باعث می‌گردد تا دمای نهایی تبدیل به فاز کاملاً آستنیت در دماهای مختلف روی دهد برای پیش کرنش‌های نیم، یک و دو درصد به ترتیب در دماهای

در رابطه فوق، E_M و E_A به ترتیب مدول یانگ در آستنیت کامل و مدول یانگ در مارتنزیت کامل هستند. با توجه به ویژگی‌های خاص SMA قرارگیری آن‌ها در صفحات کامپوزیتی علاوه بر تغییر خواص مکانیکی باعث تغییر در انرژی پتانسیل آن‌ها و در نهایت همان ماتریس سختی می‌گردد که برای مدل‌سازی فیبرهای SMA تعبیه شده در ساختارهای مواد کامپوزیتی از دو روش مختلف استفاده می‌شود. اولین روش استفاده از تنظیم ویژگی فعال (APT) است، که در آن تغییر در مدول الاستیک SMA با گرمایش برای اصلاح سختی صفحه کامپوزیت استفاده می‌شود. در این روش با توجه به دمای جسم خواص کلی ماده استخراج می‌گردد. در روش دوم با توجه به تنظیم انرژی کرنش فعال^۲ (ASET)، الیاف‌های SMA قبل از قرار دادن در یک ماده کامپوزیتی، تحت بارگذاری کششی در فاز مارتنزیتی قرار می‌گیرد که به الیاف‌ها، کرنش‌های اولیه داده می‌شود این بارگذاری تا رسیدن به ناحیه Detwinned Martensite ادامه می‌یابد و چون ماده در این حالت خواص پلاستیک دارد با باربرداری مقداری کرنش پسماند در آن باقی می‌ماند. در این حالت الیاف در زمینه ماتریسی قرار می‌گیرد [۱۰].

در روش ASET، صفحه تحت بار حرارتی قرار می‌گیرد و با توجه به خواص آلیاژ SMA در زمینه کامپوزیتی، این ماده با افزایش دما تمایل دارد که به شکل اولیه برگردد ولی چون در ماده زمینه ماتریسی محصور است به صورت آزادانه نمی‌تواند به حالت اولیه برگردد (اثر حافظه‌داری) از طرفی چون صفحه تحت بار قرار دارد نیز تمایل به تغییر شکل دارد که نیروی منتقل شده از SMA به صفحه در مقابل این تغییر شکل مقاومت می‌کند که به اصطلاحی نسبت به افزایش دما در صفحه تنش‌های بازیابی^۳ ایجاد می‌شود. این تنش بازیابی را می‌توان با مدل کردن الیاف SMA محصور از طرفین به دست آورد که معادل با یک تیر یک‌بعدی می‌باشد که دارای شرایط مرزی گیردار در دوسر آن می‌باشد. چون ماده در حالتی که از روش ASET استفاده می‌کند اثر بارگذاری مکانیکی در ماده داریم با توجه به نمودارهای تغییر فاز در شکل ۲ در دماهای بالاتری نسبت به دماهای تبدیل جدول ۱ تغییر فاز خواهیم داشت. مقادیر تنش بازیابی از منبع [۸] به صورت روابط زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_0 + \theta(T - T_0) & 0 \leq T \leq A_s^\sigma \\ \sigma_1 + [E_s(\xi) - E_s(\xi_0)]\varepsilon_0 + \Omega(\xi)\xi_{s0} + \theta(T - A_s^\sigma) & A_s^\sigma \leq T \leq A_f^\sigma \\ \sigma_2 + \theta(T - A_f^\sigma) & T \geq A_f^\sigma \end{cases}\quad (10)$$

در رابطه فوق، $u^{(k)}$ و $v^{(k)}$ جابه‌جایی‌های درون صفحه در هر نقطه (x, y, z) هستند، u_0 و v_0 نشان دهنده جابه‌جایی درون صفحه نقطه $(x, y, 0)$ در صفحه میانی هستند، w تغییر شکل خارج صفحه است، φ_x ، φ_y نیز چرخش‌های عمود بر صفحه میانی به ترتیب حول محور y و x هستند.

میدان‌های جابه‌جایی مربوطه برای لایه بالایی (۳) و لایه پایین (۱) به ترتیب برابر است با:

$$\begin{aligned} u^{(3)}(x, y, z) &= u_0(x, y) + \frac{h_1}{2} \varphi_x^{(2)}(x, y) + \frac{h_3}{2} \varphi_x^{(3)}(x, y) + z^{(3)} \varphi_x^{(3)}(x, y) \\ v^{(3)}(x, y, z) &= v_0(x, y) + \frac{h_1}{2} \varphi_y^{(2)}(x, y) + \frac{h_3}{2} \varphi_y^{(3)}(x, y) + z^{(3)} \varphi_y^{(3)}(x, y) \\ w^{(3)}(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h_1}{2} \varphi_x^{(2)}(x, y) - \frac{h_1}{2} \varphi_x^{(1)}(x, y) + z^{(1)} \varphi_x^{(1)}(x, y) \\ v^{(1)}(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h_1}{2} \varphi_y^{(2)}(x, y) - \frac{h_1}{2} \varphi_y^{(1)}(x, y) + z^{(1)} \varphi_y^{(1)}(x, y) \\ w^{(1)}(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (15)$$

در روابط فوق h_k ضخامت لایه k ام و $z^{(k)} \in [-h_k/2, h_k/2]$ مختصات z لایه k ام می‌باشد. میدان جابه‌جایی را می‌توان برای N_L لایه عددی به صورت رابطه زیر گسترش داد:

بالای لایه میانی:

$$u^{(k)}(x, y, z) = u_0(x, y) + \frac{1}{2} \left[h_m \varphi_x^{(m)} + 2 \sum_{i=m+1}^k h_i \varphi_x^{(i)} + h_k \varphi_x^{(k)} \right] + z^{(k)} \varphi_x^{(k)} \quad (k = m+1, m+2, \dots, N_L) \quad (16)$$

$$v^{(k)}(x, y, z) = v_0(x, y) + \frac{1}{2} \left[h_m \varphi_y^{(m)} + 2 \sum_{i=m+1}^k h_i \varphi_y^{(i)} + h_k \varphi_y^{(k)} \right] + z^{(k)} \varphi_y^{(k)}$$

پایین لایه میانی:

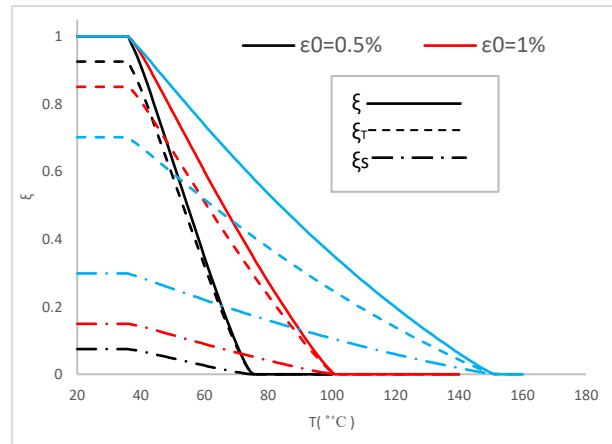
$$u^{(k)}(x, y, z) = u_0(x, y) - \frac{1}{2} \left[h_m \varphi_x^{(m)} - 2 \sum_{i=m}^k h_i \varphi_x^{(i)} + h_k \varphi_x^{(k)} \right] + z^{(k)} \varphi_x^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (17)$$

$$v^{(k)}(x, y, z) = v_0(x, y) - \frac{1}{2} \left[h_m \varphi_y^{(m)} - 2 \sum_{i=m}^k h_i \varphi_y^{(i)} + h_k \varphi_y^{(k)} \right] + z^{(k)} \varphi_y^{(k)}$$

M بیانگر شماره لایه میانی می‌باشد. (شماره گذاری طبق هندسه شکل ۶ انجام می‌شود).

در روابط بالا صفحه میانی شامل مجهولات $(\varphi_x^{(k)}, \varphi_y^{(k)})$ و بقیه صفحات شامل $(u_0, v_0, w, \varphi_x^{(m)}, \varphi_y^{(m)})$ می‌باشند پس دارای $3+2N_L$ مجهول در معادلات هستیم. در روش نوار محدود با توجه به نوع شرایط مرزی و انتخاب توابع شکل این مجهولات را با روش نوار محدود می‌توان تقریب زد.

تقریباً ۷۵/۵، ۱۰۰ و ۱۵۱/۱ درجه سانتیگراد رخ می‌دهد.

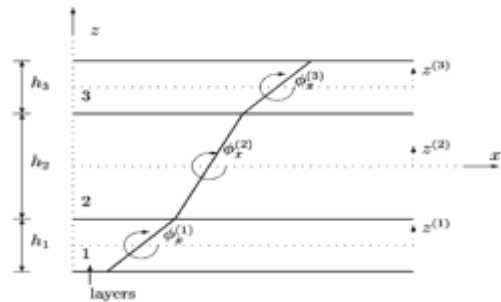


شکل ۵- تغییرات کسر مارتنزیتی در پیش کرنش‌های مختلف.

Fig. 5. Variation of martensitic fraction at different pre-strains.

۳. تئوری خمشی زیگ-زاگ صفحه (سینماتیک صفحه)

تئوری زیگ-زاگ ارائه شده در این مقاله مبتنی بر فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در هر لایه و ایجاد پیوستگی جابه‌جایی در سطح مشترک بین دو لایه مجاور می‌باشد. در هر لایه، فرضیاتی مشابه تئوری برشی مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود [۱۵]. برای درک بهتر روابط در ابتدای مسئله یک صفحه کامپوزیتی متشکل از سه لایه را در نظر می‌گیریم که مطابق شکل ۶، لایه وسط را به عنوان لایه میانی و مبدا در نظر می‌گیریم.



شکل ۶- صفحه کامپوزیتی سه لایه [۱۵].

Fig. 6. Three-layer composite plate [15].

برای صفحه فوق در میدان جابه‌جایی متغیر $z^{(k)}$ در راستای ضخامت هر لایه به صورت محلی، که مبدا آن وسط هر لایه می‌باشد، تعریف می‌شود. در این صورت میدان جابه‌جایی به صورت روابط زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x, y, z) &= u_0(x, y) + z^{(2)} \varphi_x^{(2)}(x, y) \\ v^{(2)}(x, y, z) &= v_0(x, y) + z^{(2)} \varphi_y^{(2)}(x, y) \\ w^{(2)}(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (18)$$

که با توجه به میدان جابه‌جایی مقادیر آن‌ها برابر هستند با:

$$membran : \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$flexural : \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^f(k) \\ \varepsilon_{yy}^f(k) \\ \gamma_{xy}^f(k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{mf(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{mf(1)} \\ \gamma_{xy}^{mf(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h_2}{2} \frac{\partial \phi_x^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial \phi_x^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{h_2}{2} \frac{\partial \phi_y^{(2)}}{\partial y} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial \phi_y^{(1)}}{\partial y} \\ \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \phi_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^{(2)}}{\partial x} \right) - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial \phi_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^{(1)}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{mf(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{mf(2)} \\ \gamma_{xy}^{mf(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{mf(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{mf(3)} \\ \gamma_{xy}^{mf(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h_2}{2} \frac{\partial \phi_x^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_3}{2} \frac{\partial \phi_x^{(3)}}{\partial x} \\ \frac{h_2}{2} \frac{\partial \phi_y^{(3)}}{\partial y} + \frac{h_3}{2} \frac{\partial \phi_y^{(3)}}{\partial y} \\ \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \phi_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^{(2)}}{\partial x} \right) + \frac{h_3}{2} \left(\frac{\partial \phi_x^{(3)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y^{(3)}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

بالا نویس m برای نمایش کرنش‌های غشایی f^1 برای کرنش‌های خمشی mf^2 و mf^3 برای کرنش‌های کشش-خمشی می‌باشد که در هر لایه دارای مقادیر جدا هستند. به رابطه کلی میدان جابه‌جایی معادله-۱۶ اگر توجه کنیم ترم‌هایی که داخل علامت سیکمای جمع هستند همان مقادیر ایجاد کننده کشش-خمشی می‌باشند، مقادیر جابه‌جایی ابتدایی صفحه میانی همان کرنش‌های غشایی و ترم آخر نیز برای کرنش خمشی می‌باشند.

برای رفتار پس‌کمانشی نیز از ترم‌های غیرخطی کرنش معادله ۲۴ استفاده خواهیم کرد که در راستای ضخامت کل استفاده می‌شود.

$$non-linear : \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{n_t} G_{u_0}^m(x) F_{u_0}^m(y)$$

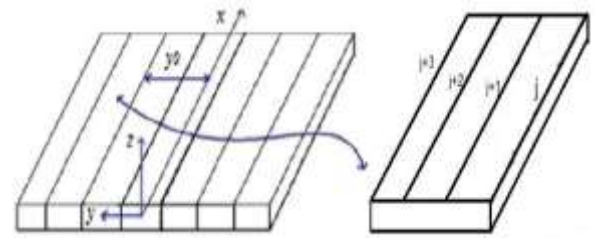
$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{n_t} G_{v_0}^m(x) F_{v_0}^m(y)$$

$$W(x, y, z) = \sum_{m=1}^{n_t} G_{w_0}^m(x) F_{w_0}^m(y) \quad (18)$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{n_t} G_{\phi_x}^m(x) F_{\phi_x}^m(y)$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{n_t} G_{\phi_y}^m(x) F_{\phi_y}^m(y)$$

با جای‌گذاری درجات آزادی تقریب شده در روابط میدان جابه‌جایی معادلات گسسته شده صفحه برای هر نوار محدود به‌دست می‌آید. در این تحقیق از نوارهای محدود مرتبه ۳ استفاده شده است که دارای ۴ خط گرهی می‌باشند (شکل ۷)، که به توجه به لایه مورد نظر، مجهولات بالا به‌عنوان درجات آزادی بر روی خطوط گرهی تعریف می‌شوند.



شکل ۷- تقسیم صفحه به نوارهای محدود.

Fig. 7. Division of the plate into finite strips.

پس برای هر نوار توابع طولی و عرضی مطابق رابطه زیر تعیین می‌شوند.

$$F_{u_0}(y) = N_1 u_0(j) + N_2 u_0(j+1) + N_3 u_0(j+2) + N_4 u_0(j+3)$$

$$F_{v_0}(y) = N_1 v_0(j) + N_2 v_0(j+1) + N_3 v_0(j+2) + N_4 v_0(j+3)$$

$$F_{w_0}(y) = N_1 w_0(j) + N_2 w_0(j+1) + N_3 w_0(j+2) + N_4 w_0(j+3) \quad (19)$$

$$F_{\phi_x}(y) = N_1 \phi_x(j) + N_2 \phi_x(j+1) + N_3 \phi_x(j+2) + N_4 \phi_x(j+3)$$

$$F_{\phi_y}(y) = N_1 \phi_y(j) + N_2 \phi_y(j+1) + N_3 \phi_y(j+2) + N_4 \phi_y(j+3)$$

توابع شکل عرضی N به‌صورت توابع لاگرانژی هستند. می‌توان میدان کرنش کل را برحسب متغیرهای داخل و خارج صفحه نیز جدا کرد.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(m)}(k) \\ \varepsilon_{yy}^{(m)}(k) \\ \gamma_{xy}^{(m)}(k) \end{Bmatrix} + z^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(f)}(k) \\ \varepsilon_{yy}^{(f)}(k) \\ \gamma_{xy}^{(f)}(k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{mf}(k) \\ \varepsilon_{yy}^{mf}(k) \\ \gamma_{xy}^{mf}(k) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} + \phi_x^{(k)} \\ \frac{\partial W}{\partial y} + \phi_y^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{16}^{(k)} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21}^{(k)} & \bar{Q}_{22}^{(k)} & \bar{Q}_{26}^{(k)} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61}^{(k)} & \bar{Q}_{62}^{(k)} & \bar{Q}_{66}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^{(k)} & \bar{Q}_{45}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54}^{(k)} & \bar{Q}_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

اکنون که روابط تنش-کرنش بیان شد برای استخراج معادلات متشکله از روش انرژی باید پتانسیل ذخیره شده در هر لایه را محاسبه کرد. انرژی کرنشی ذخیره شده در هر نوار محدود را می‌توان از معادله ۳۰ استخراج کرد که بردار سطری تنش در بردار ستونی کرنش ضرب می‌شود.

$$U_{FS}^{(k)} = \frac{1}{2} \iiint \left(\sigma_{xx}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \sigma_{yy}^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)} + \tau_{xy}^{(k)} \gamma_{xy}^{(k)} + \tau_{yz}^{(k)} \gamma_{yz}^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \gamma_{xz}^{(k)} \right) dx dy dz - \Delta T(x, y, z) \begin{Bmatrix} \alpha_x^{(k)} \\ \alpha_y^{(k)} \\ \alpha_z^{(k)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

همانطور که اشاره شد، بحث ما در این بخش، بررسی پاسخ غیرخطی پس‌کمانش یک صفحه ساخته شده از مواد مرکب است که تحت بارحرارتی قرار گرفته است. بنابراین در این نوع مسئله، نیروی خارجی همان تنش ریکاوری و انرژی پتانسیل کل نوار معادل با مجموع انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل بار خارجی ذخیره شده در آن خواهد بود که یک رابطه جبری بر حسب درجات آزادی است که انتگرال روی سطح را نمایش می‌دهد.

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N_s} (U_{FS})_i + \sum_{j=1}^{N_s(SMA)} (U_r)_j \quad (31)$$

با توجه به اینکه انرژی ذخیره شده در نوار محدود پایستار می‌باشد و اتلاف انرژی نداریم و محیط کاملاً الاستیک می‌باشد می‌توان از اعمال قضیه کاستیگلیانو بر رابطه انرژی ماتریس‌های سختی [K] را مانند رابطه-۳۲ استخراج کرد.

$$K_{ij} = \frac{\partial}{\partial d_i} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial d_j} \right) \quad (32)$$

۴-۱ روش نیوتن-رافسون

می‌توان فرم انرژی پتانسیل را در نهایت به‌صورت معادله ۳۳ نوشت، که $\{d\}$ بردار درجات آزادی کل صفحه می‌باشد.

$$\Pi = -\tilde{X} \{d\}^T \{V\} + \{d\}^T [K] \{d\} \quad (33)$$

۳-۱ اثرات نقص هندسه

برای اضافه کردن نقص هندسی اولیه باید تابع شکل آن را به‌میدان جابه‌جایی اضافه کنیم، که در یک ضریب ضرب شده و به مقدار جابه‌جایی خارج صفحه اضافه گردد.

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + \eta w_{imp}(x, y) \quad (25)$$

$$w_{imp}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

w_{imp} نقص اولیه و η دامنه نقص اولیه می‌باشد، معادله-۲۵ برای یک صفحه در نظر گرفته می‌شود که برای ایجاد این نقص بر روی هر نوار باید تابع آن را به فرم تابع زیر تبدیل کرد که با این تغییر باعث حفظ پیوستگی بین نوارها می‌شود [۱۶].

$$w_{imp}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi((nss-1)*b_{strip}+y)}{b}\right) \quad (26)$$

در رابطه فوق nss شماره نوار و b_{strip} عرض هر کدام از نوارها می‌باشد. مشتقات میدان جابه‌جایی در حضور نقص اولیه به‌صورت روابط زیر اصلاح می‌گردند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + \eta \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_{imp}}{\partial x} + \frac{1}{2} \eta^2 \left(\frac{\partial w_{imp}}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^0 + \eta \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_{imp}}{\partial y} + \frac{1}{2} \eta^2 \left(\frac{\partial w_{imp}}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + \eta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_{imp}}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_{imp}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

در رابطه فوق مشتقات با اندیس‌های بالانویس صفر مربوط به کرنش‌های معادله ۲۰ می‌باشند.

۴. معادلات حاکم بر مسئله

اکنون روابط میدان جابه‌جایی و کرنش را برای تئوری زیگ-زاگ نوار محدود داریم که همه روابط بر حسب درجات آزادی نوشته شده‌اند. حال می‌توان تنش را در هر لایه محاسبه کرد، پس داریم:

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}] \{\varepsilon\}_M + V_f^{SMA} \{\sigma^r(T, \varepsilon_r)\} \quad (28)$$

مقدار تنش ریکاوری از معادله ۱۰ قابل محاسبه است. برای تنش مکانیکی با حذف تنش عمودی راستای ضخامت به‌دلیل ثابت بودن میدان جابه‌جایی در این راستا و فرض ارتوتروپیک برای هر لایه کامپوزیتی می‌توان رابطه تنش-کرنش مکانیکی را در مختصات محلی الیاف نوشت و برای مقادیر تنش-کرنش در مختصات بارگذاری یا گلوبال در حالت ارتوتروپیک داریم:

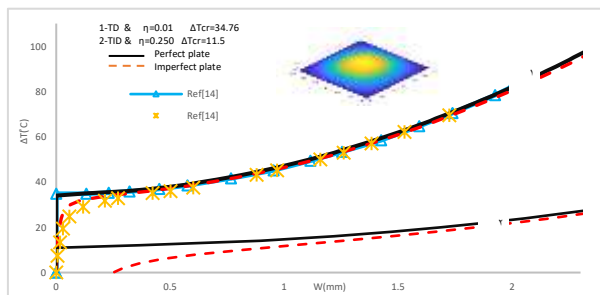
تکیه‌گاه ساده برای تمامی لبه‌ها و نیز شرایط داخل صفحه به‌صورت جابه‌جایی بسته در راستای عرض صفحه مدل‌سازی شده است.

جدول ۲- مشخصات صفحه کامپوزیتی [۶].

Table 2- Properties of the composite plate [6].

Properties	Temperature-Dependent Graphite Epoxy (TD)	Graphite/epoxy (temperature-independent matrix, TID)
E ₁₁ (GPa)	155(1-3.53*10 ⁻⁴ ΔT)	38.1
E ₂₂ =E ₃₃ (GPa)	8.07(1-4.27*10 ⁻⁴ ΔT)	9.65
G ₁₂ =G ₁₃ (GPa)	4.28(1-6.06*10 ⁻⁴ ΔT)	6.21
G ₂₃ (GPa)	3.25(1-3.53*10 ⁻⁴ ΔT)	6.21
α ₁ (1/ °C)	-0.07*10 ⁻⁶ (1-1.25*10 ⁻³ ΔT)	4*10 ⁻⁶
α ₂ (1/ °C)	30.1*10 ⁻⁶ (1+0.41*10 ⁻⁴ ΔT)	16*10 ⁻⁶
ν ₁₂	0.22	0.26

صفحه ابتدا در دمای ۲۰ درجه سانتی‌گراد قرار دارد (مقدار ΔT مربوط به اختلاف دما نسبت به دمای اولیه می‌باشد) و سپس برای حل غیرخطی در الگوریتم نیوتن-رافسون در هر مرحله متغیر دما تغییر می‌کند. نتایج در شکل ۸- نمایش داده شده است.



شکل ۸- پس‌کمانش حرارتی.

Fig. 8. Thermal post-buckling.

توابع طولی u, w, ϕ_y سینوسی و توابع v, ϕ_y کسینوسی انتخاب شده‌اند و از سه نوار محدود و دو ترم در تحلیل این مسئله استفاده شده است و با نتایج مقاله [۶] نیز مقایسه شده است.

۲- صفحه کامپوزیتی حاوی فیبر آلیاژهای حافظه‌دار

صفحه کامپوزیتی هشت لایه با لایه‌چینی $[0^{SMA}/45/-45/90]_s$ که لایه اول و آخر آن حاوی الیاف SMA می‌باشد با خواص TD جدول ۲ با نتایج منبع [۶] مقایسه شده است. (عبارت WOS به‌معنای صفحه بدون الیاف SMA می‌باشد).

که بردار $\{v\}$ ، بردار ثابت‌ها و همچنین $\{d\}$ بردار درجات آزادی و $\tilde{x}$ نیز پارامتر بارگذاری (بار حرارتی) می‌باشد. ابعاد ماتریس سختی با توجه به تعداد درجات آزادی تعیین می‌شود، چون از نوار مرتبه ۴ استفاده کردیم و در لایه میانی ۵ درجه آزادی و در بقیه لایه‌ها دو درجه داشتیم برای هر نوار کامپوزیتی $N_{DOF}=4(3+2N_L)$ درجه آزادی به‌ازای یک هارمونیک در تابع طولی نوار خواهیم داشت که با افزایش تعداد هارمونیک‌ها، و حذف تعداد درجات آزادی در لبه‌های مشترک نوار به معادله ۳۴ می‌رسیم.

$$N_{total} = N_{strip} * N_{DOF} - (N_{strip} - 1)(3 + 2N_L) \quad (34)$$

پس ابعاد ماتریس سختی $[N_{total}, N_{total}]$ می‌شود. بر اساس حداقل انرژی پتانسیل، برای یافتن معادلات تعادل صفحه لازم است از انرژی پتانسیل کل صفحه نسبت به درجات آزادی $\{d\}$ مشتق گرفته شود. بدین ترتیب با مشتق‌گیری از معادله ۳۳ نسبت به بردار درجات آزادی دستگاه تعادل معادلات که به‌صورت غیرخطی (ترم‌های غیرخطی از درجات آزادی داخل ماتریس $[K]$ وجود دارند) هم می‌باشد به‌صورت معادله ۳۵ به‌دست می‌آید.

$$0 = -\tilde{X} \{V\} + [K] \{d\} \quad (35)$$

قبل از حل این معادلات، شرایط مرزی مسئله در لبه‌های کناری صفحه، مطابق با تکنیک‌های المان محدود اعمال و دستگاه اصلاح شده نهایی حل شود. برای حل معادله غیرخطی از روش تکراری-افزایشی نیوتن-رافسون استفاده می‌شود. در این فرایند ابتدا یک بردار درجه آزادی به‌عنوان تخمین اولیه مثلاً $\{d_i\}$ به‌ازای یک مقدار مشخص بار حرارتی حدس زده می‌شود. پس از قرار دادن مقادیر این بردار در معادله، به‌دلیل دقیق نبودن حدس اولیه، انتظار می‌رود که خطای تخمین داشته باشیم. فرایند نیوتن-رافسون اکنون در مرحله بعدی تخمین، جواب دقیق‌تری به‌صورت $\{d_{i+1}\}$ پیدا می‌کند و بدین‌صورت مقدار $\{F\{d_i\}\}$ را با تقریب خوبی به‌سمت صفر هدایت می‌کند. روش یافتن $\{d_{i+1}\}$ از طریق گسترش سری تیلور، به شکل معادله ۳۶ انجام می‌شود.

$$\{F\{d_{i+1}\}\} \approx \{F\{d_i\}\} + \frac{\partial \{F\{d_i\}\}}{\partial \{d_i\}} \{\{d_{i+1}\} - \{d_i\}\} \quad (36)$$

این فرایند تکراری را می‌توان با تعریف معیارهای همگرایی تا زمانی ادامه داد که به جواب مورد نظر با دقت خواسته شده همگرا شود.

۵. صحت‌سنجی و نتایج

الف- صحت‌سنجی

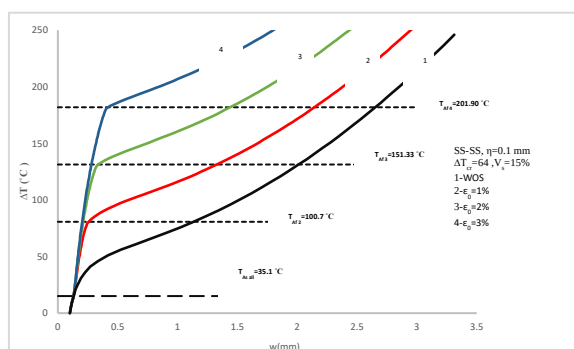
۱- صفحه کامپوزیتی کامل و غیر کامل تحت بار حرارتی

صفحه مربعی کامپوزیتی چهار لایه با لایه‌چینی $[0/90]_s$ و طول ۳۰۰ میلی‌متر و خواص جدول ۲ و شرایط مرزی خارج صفحه به‌صورت

۲- تاثیر پیش کرنش مواد وابسته به دما بر مسیر کمانش حرارتی صفحه کامپوزیت SMA ناقص

صفحه کامپوزیتی پنج لایه با لایه چینی $[0,90,0^{SMA}/90/0]$ و خواص جدول ۲ به طول ۳۰۰ و عرض ۲۰۰ و ضخامت ۳ میلی متر، تحت بار حرارتی قرار دارد که مسیر پس کمانش به ازای پیش کرنش های مختلف رسم شده است.

مشاهده می شود که اثر پیش کرنش در نسبت های حجمی مختلف باعث بهبود رفتار می گردد.

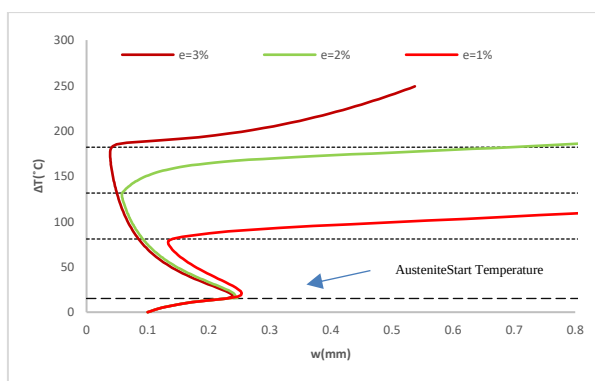


شکل ۱۰- پس کمانش صفحه ۵ لایه.

Fig. 10. Post-buckling of a five-layer plate.

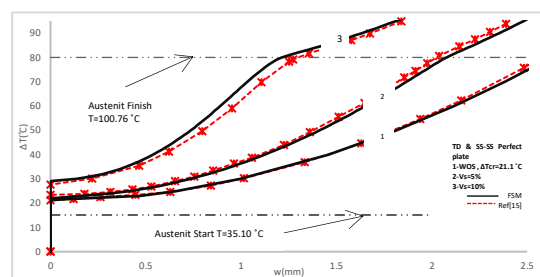
۳- رفتار پس کمانشی صفحات با نقص اولیه در ناحیه کاملاً آستنیت

در شکل ۱۱ نمودارهای پس کمانشی صفحه کامپوزیتی چهار لایه با لایه چینی $[0^{SMA}/90]_s$ و خواص گرافیت-اپوکسی TD جدول ۲ به طول ۳۰۰ و عرض ۲۰۰ و ضخامت ۲ میلی متر، تحت بار حرارتی قرار دارد. مسیر پس کمانش به ازای پیش کرنش های مختلف با نسبت حجمی ۱۰ درصد از الیاف SMA رسم شده است.



شکل ۱۱- رفتار پس کمانشی صفحه با نقص اولیه در ناحیه کاملاً آستنیت.

Fig. 11. Post-buckling behavior of an initially imperfect plate in the fully austenitic region.



شکل ۹- پس کمانش حرارتی صفحه دارای الیاف SMA.

Fig. 9. Thermal post-buckling of a plate reinforced with SMA fibers.

توابع طولی u, w, ϕ_y سینوسی و توابع v, ϕ_y کسینوسی انتخاب شده اند و از سه نوار محدود و سه ترم در تحلیل این مسئله استفاده شده است. شرایط مرزی داخل صفحه به صورت جابه جایی بسته در راستای عرض صفحه و همچنین شرایط مرزی خارج صفحه به صورت تکیه گاه لولایی ساده می باشد.

ب- نتایج

۱- کمانش صفحه کامپوزیتی حاوی SMA در نسبت های حجمی و پیش کرنش های مختلف تحت بار حرارتی

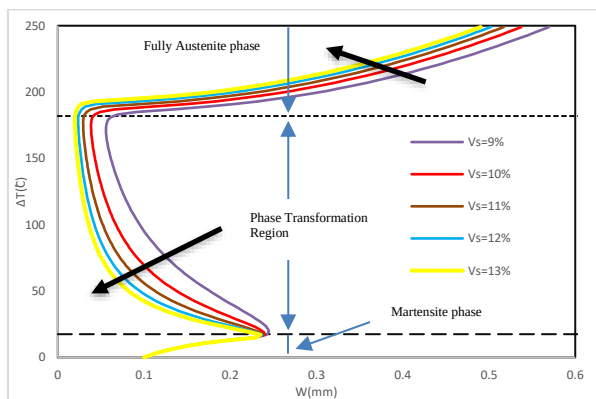
در جدول ۳ اثر الیاف SMA بر کمانش حرارتی صفحات مطالعه شده است. دمای مرجع ۲۰ درجه سانتیگراد می باشد. هر دو روش APT و ASET در این مثال بررسی شده است. از آنجایی که در روش APT تنش بازیابی ناچیز است و مدول الاستیسیته SMA کمتر از مدول کامپوزیت است، استفاده از این روش ممکن است در بهبود کمانش حرارتی اثر معکوس داشته باشد زیرا باعث کاهش سختی سازه می شود. اثر پیش کرنش و نسبت حجمی الیاف SMA به وضوح قابل مشاهده است.

جدول ۳- کمانش صفحه با خواص APT و ASET.

Table 3- Buckling of a plate with APT and ASET properties.

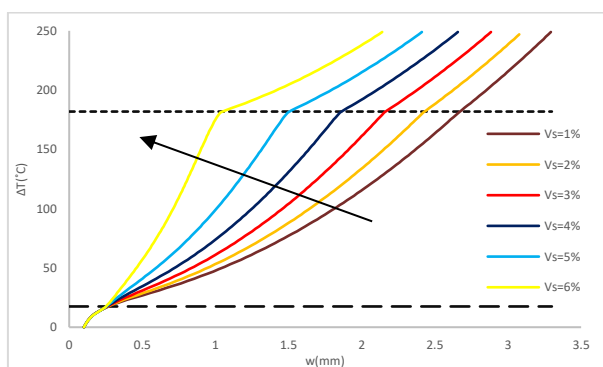
$[0^{SMA}/90/0/90]_s$ $a=b=200$ mm, $h=2$ mm, TD					
$\Delta T (^{\circ}C)$	WOS	$V_s=5\%$	$V_s=10\%$	$V_s=15\%$	$V_s=20\%$
APT					
SSSS	54	53	51	50	48
CCCC	201	199	193	190	185
ASET					
$e=1\%$					
SSSS		86	118	152	185
CCCC		231	256	290	320
ASET					
$e=2\%$					
SSSS		105	184	203	218
CCCC		260	310	361	391

رفتار پس‌کمانشی در ناحیه تغییر فاز (شکل ۱۳) با افزایش نسبت حجمی بهتر می‌شود که نهایتاً در نسبت حجمی نقطه قبل از فاز کاملاً آستنیتی به بیشترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۱۲- تاثیر نسبت حجمی در فاز کاملاً آستنیتی.

Fig. 12. The effect of volume ratio in the fully austenitic phase.



شکل ۱۳- تاثیر نسبت حجمی در ناحیه تغییر فاز.

Fig. 13. The effect of volume ratio in the phase transformation region.

۵- تاثیر شرایط مرزی مختلف

تاثیر شرایط مرزی و نقص هندسی در رفتار پس از کمانش صفحه کامپوزیتی ۴ لایه با لایه‌چینی $[0^{SMA}/90]_s$ و خواص نتیجه ۳، در شکل ۱۴ ترسیم شده است. سه نوع شرایط مرزی مختلف بررسی شده است.

همانطور که انتظار می‌رود، با توجه به نمودارهای شکل ۱۴ صفحات با شرایط مرزی محدودتر در برابر انحراف خارج از صفحه مقاومت بیشتری دارند. در این نتیجه نیز از روش ASET استفاده شده است که به‌ازای مقدار پیش‌کرنش و نسبت حجمی دمای بحرانی کمانش بیشتر از دمای پایان فاز آستنیت می‌باشد.

به‌ازای هر پیش‌کرنشی از آلیاژ SMA یک مقدار نسبت حجمی معینی وجود دارد که به‌ازای آن مقدار کمانش صفحه در حالتی اتفاق می‌افتد که فاز SMA در ناحیه کاملاً آستنیت قرار دارد، (مثلاً برای پیش‌کرنش سه درصد در نسبت ۸ درصد حجمی رخ می‌دهد. برای صفحه با خواص و لایه‌چینی متفاوت این مقدار تغییر می‌کند) در این نسبت حجمی اگر هندسه اولیه صفحه دارای نقص باشد در این صورت رفتار پس‌کمانش مانند نتیجه ۲ تماماً افزایشی نخواهد بود، بلکه در این حالت تا رسیدن به دمای شروع فاز آستنیت خیز صفحه افزایشی می‌باشد که پس از شروع تغییر فاز در این ناحیه خیز صفحه (در حالی که دما در حال افزایش است) کاهش می‌گردد وقتی که به نقطه‌ای می‌رسیم که الیاف تماماً به آستنیت تبدیل می‌شود، خیز صفحه به شدت افزایشی می‌شود و به‌ازای بار کم‌تر، جابه‌جایی زیاد رخ می‌دهد. در مقدمه پژوهش حاضر اشاره شد که فاز آستنیت آلیاژ SMA در دمای بالا و تنش پایین پایدار است، زمانی که الیاف SMA صفحه در ناحیه کاملاً آستنیتی قرار دارد دما و تنش مقادیر بالایی دارند که از لحاظ دمایی الیاف پایدار ولی از لحاظ تنشی ناپایدار است اما رفتار پس‌کمانشی پایداری دارد که به دلیل محصور بودن در داخل زمینه ماتریسی ماده می‌باشد در واقع می‌توان گفت که از رفتار پس‌کمانشی بهبود یافته در تغییرات بین فازی به رفتار پس‌کمانشی ضعیف تبدیل شده است. در ناحیه بین شروع تا پایان آستنیت برای پیش‌کرنش دو درصد به‌ازای فرضاً تغییر ۲۰ درجه دما در ناحیه تغییر فاز ۰/۰۷ میلی‌متر از خیز صفحه کم شده در حالی که در ناحیه کاملاً آستنیت ۰/۵۳ میلی‌متر به خیز وسط صفحه اضافه گردیده است.

۴- تاثیرات نسبت حجمی الیاف SMA در رفتار پس‌کمانشی

برای صفحه کامپوزیتی کامپوزیتی ۴ لایه با لایه‌چینی $[0^{SMA}/90]_s$ و خواص نتیجه ۳، در پیش‌کرنش سه درصد اثر نسبت‌های حجمی مختلف را بررسی خواهیم کرد.

این درصد نسبی در حالت اول دارای مقداری است که کمانش صفحه کامل به‌ازای آن در شرایط کاملاً آستنیت (شکل ۱۲) و در حالت دوم در حالت تغییر فازی (شکل ۱۳) رخ می‌دهد.

با توجه به شکل ۱۲ تقریباً در فاز مارتنزیتی افزایش نسبت حجمی اثری ندارد. با افزایش درصد حجمی تغییرات خیز وسط صفحه کاهش کمتری دارد، بیشترین مقدار آن برای مقدار ۹ و ۱۰ درصد می‌باشد که فرضاً در دمای ۱۲۰ درجه برای درصد ۹ مقدار خیز صفحه ۰/۰۶۶ و برای ۱۰ درصد ۰/۰۹۴ میلی‌متر می‌باشد که در ناحیه کاملاً آستنیت مقدار آن‌ها به ۰/۳۹۷ و ۰/۴۳۲ میلی‌متر افزایش می‌یابد.

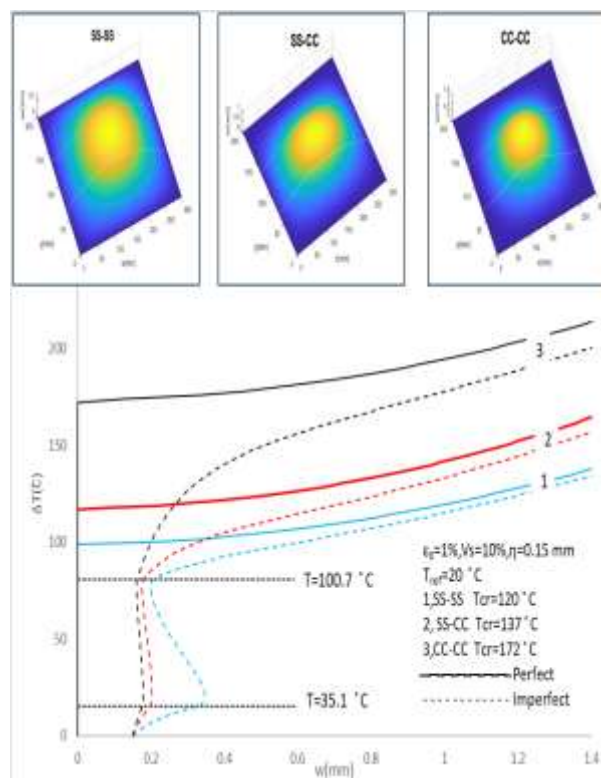
تولید می‌شود و در ناحیه کاملاً آستنیت جابه‌جایی خارج صفحه افزایش بیشتری دارد.

تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

مراجع

- [1] D. I. Arun, P. Chakravarthy, R. A. Kumar, and B. Santhosh, *Shape Memory Materials*. 1st ed. Boca Raton: Taylor & Francis Group Logo, 2018, <https://doi.org/10.1201/9781351119948>.
- [2] M. Balasubramanian, R. Srimath, L. Vignesh and S. Rajesh, "Application of shape memory alloys in engineering – A review," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2054, 2021, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2054/1/012078>.
- [3] N. Fanaei and S. M. Seyedan, *Shape Memory Alloys from Theory to Application*, Tehran, Iran: K. N. Toosi University of Technology, 2024, (in Persian), https://press.kntu.ac.ir/book_398025.html
- [4] H. Asadi, E. Mehdi, and Q. Wang, "Nonlinear thermal stability of geometrically imperfect shape memory alloy hybrid laminated composite plates," *Smart Materials and Structures*, vol. 23, no. 7, 2014, Art. no. 075012, <https://doi.org/10.1088/0964-1726/23/7/075012>.
- [5] L. C. Shiau, S. Y. Kuo, and S. Y. Chang, "Postbuckling of shape memory alloy reinforced cross-ply and angle-ply laminated plates," *Journal of Mechanics*, vol. 27, no. 4, pp. 559 - 566, 2011, <https://doi.org/10.1017/jmech.2011.58>.
- [6] M. Z. Kabir and B. Tavousi Tehrani, "Closed-form solution for thermal, mechanical, and thermo-mechanical buckling and post-buckling of SMA composite plates," *Composite Structures*, vol. 168, pp. 535-548, 2017, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.046>.
- [7] C. N. Kumar and B. N. Singh, "Thermal buckling and post-buckling of laminated composite plates with SMA fibers using layerwise theory," *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 10, no. 6, pp. 423-429, 2009, <https://doi.org/10.1080/15502280903108024>.
- [8] C. Shao, D. Cao, Y. Xu, and H. Zhao, "Flutter and thermal buckling analysis for composite laminated panel embedded with shape memory alloy wires in supersonic flow," *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2016, no. 1, 2016, Art. no. 8562716, <https://doi.org/10.1155/2016/8562716>.
- [9] L. C. Brinson, "one-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined Martensite internal



شکل ۱۴- رفتار پس کمانشی صفحه با شرایط مرزی مختلف.

Fig. 14. Post-buckling behavior of a plate under different boundary conditions.

۶. نتیجه‌گیری

از روش نوار محدود نیمه‌تحلیلی برای کمانش و پس‌کمانش حرارتی و مکانیکی صفحات حاوی فیبر الیاف SMA استفاده شد. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، و همچنین از رابطه کرنش-جابه‌جایی فون-کارمن، استفاده شده است، با به‌دست آوردن برخی نتایج عددی و مقایسه آن‌ها با نتایج موجود در ادبیات، قابلیت FSM نیمه تحلیلی تایید می‌شود. اثرات عبارات مختلف مانند کسر حجمی، مقادیر پیش کرنش، شرایط مرزی و دامنه نقص در پس کمانش حرارتی صفحات تقویت شده با آلیاژ SMA مورد مطالعه قرار گرفته است.

چند مورد از نتایج اصلی:

- (۱) روش ASET نسبت به روش APT در افزایش بار بحرانی کمانش صفحات تقویت شده با الیاف SMA موثرتر است.
- (۲) افزایش کسر حجمی فیبر SMA و مقدار دمای فعال‌سازی ممکن است باعث ایجاد نیروهای بازایی بیشتر شود و بنابراین بار بحرانی کمانش ممکن است به‌طور قابل توجهی افزایش یابد.
- (۳) در ناحیه شروع فاز آستنیت تا پایان مقدار افزایش جابه‌جایی خارج از صفحه کمتری دارد زیرا مقدار زیادی تنش بازایی

- Materials and Structures*, vol. 13, no. 6, 2004, Art. no. 1337, <https://doi.org/10.1088/0964-1726/13/6/006>.
- [14] H. J. Lee and J. J. Lee, "A numerical analysis of the buckling and postbuckling behavior of laminated composite shells with embedded shape memory alloy wire actuators," *Smart Materials and Structures*, vol. 9, no. 6, 2009, Art. no. 780, <https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/6/307>.
- [15] A. J. Ferreira, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge, and E. J. Kansa, "Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and multiquadrics discretizations," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, no. 12, pp. 1104-1114, 2005, <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2005.07.004>.
- [16] H. R. Ovesy, S. A. M. Ghannadpour, and G. Morada, "Geometric non-linear analysis of composite laminated plates with initial imperfection under end shortening, using two versions of finite strip method," *Composite Structures*, vol. 71, no. 3-4, pp. 307-314, 2005, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.09.030>.
- variable," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 4, no. 2, pp. 229-242, 1993, <https://doi.org/10.1177/1045389X9300400213>.
- [10] C. Liang, The constitutive modeling of shape memory alloys, Ph.D. dissertations, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1990, <http://hdl.handle.net/10919/39218>
- [11] A. J. Zak, M. P. Cartmell, W. M. Ostachowicz, and M. Wiercigroch, "One-dimensional shape memory alloy models for use with reinforced composite structures," *Smart Materials and Structures*, vol. 12, no. 3, 2003, Art. no. 338, <https://doi.org/10.1088/0964-1726/12/3/304>.
- [12] F. Auricchio and E. Sacco, "A one-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 32, no. 6, pp. 1101-1114, 1997, [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(96\)00130-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(96)00130-8).
- [13] J. H. Roh, I. OH, S. M. Yang, J. H. Han, and I. Lee, "Thermal post-buckling analysis of shape memory alloy hybrid composite shell panels," *Smart*