

حل عددی قطاع دایروی ساخته شده از مواد FGM تحت بار عرضی، با تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی

مهمترین کاربرد مواد درجه بندی شده تابعی (FGM)، در صنعت هوافضا است، این مواد در دماهای بالا مقاومت بسیار خوبی در برابر تنش‌های وارده مخصوصاً تنش‌های پسماند دارند در این پژوهش، یک حل عددی برای قطاع حلقوی ساخته شده از ماده FGM با تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های شعاعی، تحت بار عرضی در راستای ضخامت، ارائه شده است. بدین منظور بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل حداقل انرژی پتانسیل، کل معادلات تعادل بدست آورده شده‌اند، این معادلات مستقل نیستند از این رو برای سهولت در حل، مجدد فرمول بندی شده و برای قطاع حلقوی با تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های شعاعی و برای شرایط مرزی مختلف در لبه‌های محیطی قطاع به صورت عددی، حل شده‌اند. در واقع هدف اصلی این پژوهش بررسی تکیه‌گاری تنش در شعاع نزدیک صفر است که محاسبات ما نشانگر آن است که این تنش در شعاع نزدیک صفر بینهایت می‌شود لذا شکستی اتفاق نخواهد افتاد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل تنش، ماده درجه بندی شده تابعی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تحلیل ترمومکانیکی.

A Numerical Solution of a Circular Section Made of Functionally Graded Material (FGM) under a Transverse Load, with a Simple Support on the Radial Edges

The most important application of functionally graded materials (FGM) is in the aerospace industry, these materials at high temperatures are very resistant to stresses especially residual stresses. In this study, a numerical solution for a circular branch made of FGM material with simple supports on radial edges, under transverse load along the thickness line, is presented. For this purpose, based on the first-order shear deformation theory and the principle of minimum energy, the potential of the entire equations of equilibrium is obtained. These equations are not independent. It is formulated for ease in solving, re-formulation, and for a circular sector with simple supports in radial edges and are solved numerically for the various boundary conditions in the periphery edges of the sector. In fact, this study aims to singularity of stress in a near-zero radius with calculations that indicate this stress is infinite in the near-zero radius, so failure will not occur.

Keywords: Tension analysis, functionally graded material, First-order shear deformation theory, Thermo-mechanical analysis

محمد جلوخانی نیارکی^۱، دانشجوی کارشناس ارشد، گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز.

حسین تریابیان^{۲*}، استادیار، گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز.

بهزاد جباری‌پور^۳، استادیار، گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز.

*نویسنده مخاطب، آدرس: تهران، اشرفی‌اصفهانی

h_torabian@iauctb.ac.ir

M. Jelokhani Niaraki¹, M.Sc., Student, Mechanical Engineering Dpt. Islamic Azad University Central Tehran Branches

H. Torabian^{2*}, Associate Professor, Student, Mechanical Engineering Dpt. Islamic Azad University Central Tehran Branches

B. Jabbaripour^{3*}, Associate Professor, Student, Mechanical Engineering Dpt. Islamic Azad University Central Tehran Branches

*Corresponding Author, Ashrafi Esfehani, Tehran, IRAN

h_torabian@iauctb.ac.ir

مقدمه

نیاز بشر برای یافتن موادی که دارای ویژگی‌های بهتری نسبت به مواد خالص و مرکب موجود در صنایع، دانشمندان را به سمت تولید مواد درجه بندی شده تابعی، هدایت نمود و برای اولین بار نام FGM که مخفف Functionally Graded Material (ماده درجه بندی شده تابعی) می‌باشد، توسط محققان ژاپنی در دهه ۱۹۸۰ و به علت نیاز این کشور برای توسعه صنایع هوایی معرفی گردید. در سال‌های قبل در صنایع هوا فضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش دهی و روکش نمودن قطعات تحت اثر دمای کاری بالا استفاده شده است. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های وارده نداشتند به ویژه تنش‌های پسماند در این مواد مشکلات زیادی از جمله حفره و ترک ایجاد می‌نمود. بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده گردید. تنش‌های حرارتی در این مواد نیز موجب پدیده لایه لایه شدن می‌گردید. با توجه به این مشکلات، طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته باشد و هم مشکل لایه لایه شدن را نداشته باشد ضرورت یافت. به این ترتیب با توجه به مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی بالا وجود داشت، دانشمندان علم مواد برای اولین بار مواد درجه بندی شده تابعی را به عنوان ماده‌ای با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند و نخستین نمونه از این مواد در سال ۱۹۸۴ در منطقه سندایی ژاپن [۱] در آزمایشگاه هوافضای نینو تولید گردید، نینو و کویزومی [۲] از جمله افرادی بودند که در آن زمان در ژاپن مأمور تحقیق و تولید این مواد جدید شدند. نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته‌ای از فلزات و سرامیک است که از مخلوط کردن پودر آن‌ها بدست می‌آیند، بطوریکه تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته بوده، به گونه‌ای که مثلاً یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر از جنس فلز خالص و بین این دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هر دو ماده وجود دارد. از این رو خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب اجزای تشکیل دهنده آن‌ها، دارای خواص مکانیکی موثرتری نسبت به مواد کامپوزیتی لایه‌ای هستند که به تدریج در سطح بین‌المللی ساخته شده‌اند.

مواد درجه‌بندی شده تابعی، مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگنی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها به طور ملایم و پیوسته از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کند. این مواد یکی از کاربردی‌ترین مواد در صنعت، به ویژه جهت استفاده در محیط‌هایی با درجه حرارت بسیار بالا مانند راکتورهای

هسته‌ای، توربین‌ها، موتورهای پر قدرت الکتریکی، تجهیزات صنایع هوافضا و دیگر ماشین‌آلات صنعتی به شمار می‌روند که در این بین بدلیل ویژگی‌های منحصربفرد این مواد، کاربرد آن‌ها در صنایع هوافضا در کشور به مراتب بیشتر از سایر صنایع بوده است. یکی از مهمترین کاربردهای آن ساخت بدنه و اجزای موشک، فضاپیما و ماهواره است چراکه تنش‌های حرارتی در این تجهیزات بسیار بالاست و برای جلوگیری از شکست ناشی از این تنش‌ها، ناگزیر به استفاده از این مواد هستیم. پیش‌بینی می‌گردد با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد مواد FGM، کاربردهای صنعتی آن‌ها در طی سال‌های آتی توسعه یابد. در مواد درجه‌بندی شده تابعی، گستره وسیعی از پروسه‌های تولیدی^۱ دارند، که به دو دسته اصلی ساخت لایه لایه‌ای برای تولید انبوه و ساخت بر اساس پروسه‌های طبیعی انتقال تقسیم می‌شوند، متداول‌ترین این روش‌ها عبارتند از: روش متالورژی پودر، روش گریز از مرکز^۲، روش پیوندهای احتراقی، روش پوشش لیزری و شکل‌دهی به کمک اسپری پلاسما^۳.

هدف از پژوهش جاری حل عددی قطاع حلقوی ساخته شده از مواد FGM تحت بار عرضی، با تکیه گاه ساده در لبه‌های شعاعی می‌باشد که در واقع هدف اصلی این پژوهش بررسی تکنیکی تنش در شعاع نزدیک به صفر است. محاسبات ما نشانگر آن است که این تنش در شعاع نزدیک صفر بینهایت بوده است. تاکنون هیچ حل تحلیلی برای ورق‌های قطاعی شکل حلقوی^۴ ماده درجه‌بندی شده تابعی ارائه نشده است و تمام تحلیل‌های این ورق‌ها به روش‌های کانترویج و المان محدود^۵ منتهی می‌شوند. در ضمن پاسخ‌های ارائه شده برای ورق‌های قطاعی توپر ماده درجه بندی شده تابعی محدود به زاویه رأس کوچک‌تر از ۹۰ درجه است. برای حل این مسئله از دو مقاله کمک خواهیم گرفت. ابتدا مقاله‌ی جمع‌زاده و سعیدی [۳] که یک قطاع توخالی را در نظر گرفته‌اند و دیگری مقاله نوئیر و فلاح [۴]، [۵] که در آن یک قطاع توو پر در نظر گرفته شده است.

همچنین با بررسی سوابق پژوهش‌های انجام شده دریافتیم که بیه و همکارانش به تحلیل ترمو مکانیکی ورق‌های FG تحت درجه حرارت‌های بالا و تأثیر این درجه حرارت بر جابه‌جایی خمشی و فرکانس‌های طبیعی ورق، به روش المان محدود پرداختند [۶]، فلاح و خاکباز با استفاده از روش کانترویج توسعه یافته، به بررسی رفتار مکانیکی ورق دایروی

1. Manufacturing processing
2. Centrifugal method
3. Plasma spray
4. Annular sector
5. Finite-element

حل عددی قطاع دایروی ساخته شده از مواد FGM تحت بار عرضی، با تکیه گاه ساده ...

$$\begin{aligned} U_1(r, \theta, z) &= u(r, \theta) + z \psi_r(r, \theta) \\ U_2(r, \theta, z) &= v(r, \theta) + z \psi_\theta(r, \theta) \\ U_3(r, \theta, z) &= w(r, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که u, v, w به ترتیب بیانگر جابجایی یک نقطه روی صفحه میانی ورق در راستاهای r, θ و z هستند. هم چنین ψ_r و ψ_θ بیانگر به ترتیب چرخش های کوچک حول محورهای r و θ هستند. با توجه به میدان جابجایی موجود در رابطه (۱) و صرف نظر کردن از ترم های غیرخطی، کرنش ها را بدست می آوریم. رابطه کلی کرنش و جابه جایی به صورت زیر است:

$$\vec{\epsilon} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{U} + (\vec{\nabla} \vec{U})^t) \quad (2)$$

رابطه (۲) در دستگاه مختصات استوانه ای به فرم زیر بدست می آید:

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_r \vec{e}_r \vec{e}_r + \epsilon_{r\theta} \vec{e}_r \vec{e}_\theta + \epsilon_{rz} \vec{e}_r \vec{e}_z + \epsilon_{\theta r} \vec{e}_\theta \vec{e}_r + \epsilon_{\theta\theta} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + \epsilon_{\theta z} \vec{e}_\theta \vec{e}_z + \epsilon_{zr} \vec{e}_z \vec{e}_r + \epsilon_{z\theta} \vec{e}_z \vec{e}_\theta + \epsilon_z \vec{e}_z \vec{e}_z \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه (۱) در (۲) روابط بین کرنش ها بر حسب جابه جایی ها در مختصات استوانه ای بدست می آید.

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} = u_{,r} + z \psi_{r,r} \\ &= \epsilon_r^0 + z k_r \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \theta} + U_1 \right) = \frac{1}{r} \left(u + z \psi_r + \frac{\partial v}{\partial \theta} + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) = 1r(u + z \psi_r + v_{,\theta} + z \psi_{\theta,\theta}) \\ &= \epsilon_\theta^0 + z k_\theta \\ \epsilon_z &= \frac{\partial U_3}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{\theta z} &= \left(\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} \right) = (v_{,z} + \psi_\theta + z \psi_{\theta,z} + 1r w_{,\theta}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\psi_\theta + \frac{1}{r} w_{,\theta}) &= k_{\theta z} \\ \gamma_{rz} &= \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial r} \right) = (u_{,z} + \psi_r + z \psi_{r,z} + w_{,r}) \\ (\psi_r + w_{,r}) &= k_{rz} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \theta} - U_\theta \right) + \frac{\partial U_2}{\partial r} = \left(\frac{1}{r} (u_{,\theta} + z \psi_{r,\theta} - v - z \psi_\theta) + v_{,r} + z \psi_{\theta,r} \right) = \gamma_{r\theta 0} + z k_{r\theta} \end{aligned}$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} \epsilon_r^0 &= u_{,r}, \quad k_r = \psi_{r,r}, \quad \epsilon_\theta^0 = \frac{1}{r} (u + v_{,\theta}) \\ k_\theta &= \frac{1}{r} (\psi_r + \psi_{\theta,\theta}), \quad k_{\theta z} = \psi_\theta + \frac{1}{r} w_{,\theta} \\ k_{rz} &= \psi_r + w_{,r}, \quad \gamma_{r\theta}^0 = \frac{1}{r} (u_{,\theta} - v) + v_{,r} \\ k_{r\theta} &= \frac{1}{r} (\psi_{r,\theta} - \psi_\theta) + \psi_{\theta,r} \end{aligned} \quad (5)$$

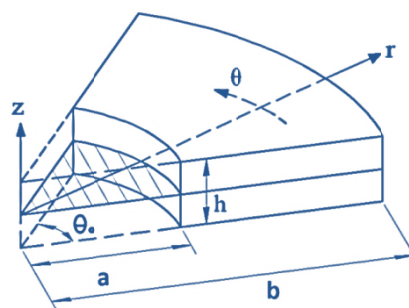
در روابط (۴) و (۵) ویرگول در زیروندها بیانگر مشتق جزئی است.

FG تحت شرایط مرزی مختلف پرداختند. [۷]، موتیا و همکارانش رفتار غیرخطی یک ورق FG را تحت بار ترمومکانیکی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مراتب بالا مورد بررسی قرار دادند. [۸]، سیوالک و بالتاسیوگلو با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و استفاده از روش عددی HDQ، فرکانس های طبیعی یک قطاع دایروی ساخته شده از ماده FG را بدست آوردند. [۹]

روند پژوهش جاری بدین صورت است که: ابتدا معادلات حاکم را بدست آورده، برای این منظور یک مدل برای حل مسئله (جهت سهولت در حل مسئله از تئوری های مقیاس بزرگ استفاده می کنیم و برای این منظور تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (تئوری کلاسیک) انتخاب شده است. تئوری های برشی مراتب بالاتر نیز همان کارایی را دارد فقط معادلاتمان پیچیده تر می شود) و سپس میدان جابجایی را بر اساس مدل انتخابی فرض کرده، سپس با استفاده از روابط کرنش-جابجایی و اصل حداقل انرژی پتانسیل، معادلات تعادل بدست آورده شده و پس از آن به تابع تنش محاسبه شده است. با استفاده از رابطه سازگاری معادلات را دی کوپل کرده تا بصورت متغیرهای مستقل باشند، اعتبار سنجی معادلات با مقالات مرجع صورت گرفته و در مرحله بعدی با در نظر گرفتن شرایط مرزی و میل دادن شعاع به سمت صفر، حل عددی در حالت بارگذاری مکانیکی ورق دایروی ساخته شده از ماده FGM انجام شده و نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی مقایسه شده اند. در انتها نیز پیشنهاداتی برای ادامه پژوهش حاضر مطرح شده است.

معادلات حاکم

شکل ۱ مدل فیزیکی مسئله است که در آن شعاع داخلی، b شعاع خارجی، h ضخامت ورق و θ زاویه است.



شکل ۱- مدل فیزیکی مسئله.

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر تعریف شده است:

$$(N_r, N_\theta, N_{r\theta}, Q_\theta, Q_r) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}) dz \quad (10)$$

$$(M_r, M_\theta, M_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}) z dz$$

به طوری که، $N_r, N_\theta, N_{r\theta}, Q_\theta, Q_r$ منتجه‌های تنش^۸ و M_r, M_θ منتجه‌های گشتاور^۹ هستند. حال با توجه به روابط (۱۰)، (۴) و (۵) برای ماده ایزوتروپ می‌توان روابط را برای منتجه‌های نیرو و گشتاور بدست آورد. بنابراین برای منتجه‌های تنش داریم:

$$\begin{aligned} N_r &= A_1 \varepsilon_r^0 + (A_1 - 2A_2) \varepsilon_\theta^0 + B_1 k_r + (B_1 - 2B_2) k_\theta \\ N_\theta &= (A_1 - 2A_2) \varepsilon_r^0 + A_1 \varepsilon_\theta^0 + (B_1 - 2B_2) k_r + B_1 k_\theta \\ N_{r\theta} &= A_2 \gamma_{r\theta}^0 + B_2 k_{r\theta} \\ Q_\theta &= K^2 A_2 k_{\theta z} \\ Q_r &= K^2 A_2 k_{rz} \end{aligned} \quad (11)$$

همچنین برای منتجه‌های گشتاور داریم:

$$\begin{aligned} M_r &= B_1 \varepsilon_r^0 + (B_1 - 2B_2) \varepsilon_\theta^0 + D_1 k_r + (D_1 - 2D_2) k_\theta \\ M_\theta &= (B_1 - 2B_2) \varepsilon_r^0 + B_1 \varepsilon_\theta^0 + (D_1 - 2D_2) k_r + D_1 k_\theta \\ M_{r\theta} &= B_2 \gamma_{r\theta}^0 + D_2 k_{r\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

در روابط بالا K^2 ضریب تصحیح برش بوده و ضرایب سختی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (A_1, B_1, D_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} (1, z, z^2) dz \\ (A_2, B_2, D_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (13)$$

به طوری که E مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون بوده و براساس رابطه توانی یاد شده تغییر می‌کنند. اما در این قسمت همچون بسیاری از تحقیق‌های دیگر، ضریب پواسون در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شود.

حال برای ساده‌تر شدن رابطه مربوط به اصل حداقل انرژی پتانسیل، منتجه‌های تنش و گشتاور را در رابطه (۹) جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \delta U &= \iint_A \{ N_r \frac{\partial}{\partial r} (\delta u) + M_r \frac{\partial}{\partial r} (\delta \psi_r) + \frac{N_\theta}{r} (\delta u) + \frac{M_\theta}{r} (\delta \psi_r) + \frac{N_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta \psi_\theta) + \frac{N_{r\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta u) + \frac{M_{r\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta \psi_r) - \frac{N_{r\theta}}{r} (\delta v) - \frac{M_{r\theta}}{r} (\delta \psi_\theta) + N_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\delta v) + M_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\delta \psi_\theta) + Q_r (\delta \psi_r) + Q_\theta \frac{\partial}{\partial r} (\delta w) + Q_\theta (\delta \psi_\theta) + \frac{Q_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta w) \} r dr d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء، رابطه بالا به دو انتگرال تبدیل شده که یکی از آن‌ها انتگرال یگانه (که مربوط به شرایط مرزی است) و دیگری انتگرال دوگانه (که مربوط به معادله دیفرانسیل است) که نشان‌دهنده معادلات دیفرانسیل حاکم است. از طرفی برای کار مجازی رابطه (۱۵) را داریم.

بعد از بدست آوردن کرنش‌ها با استفاده از میدان جابه‌جایی معادلات تعادل را با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بدست می‌آوریم. برای انجام این کار لازم است که ابتدا رابطه مربوط به انرژی کرنشی الاستیک ذخیره شده در جسم را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بدست آوریم. انرژی کرنشی الاستیک ذخیره شده در جسم در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$U = \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \sigma_{rz} \gamma_{rz} + \sigma_{\theta z} \gamma_{\theta z}) dv \quad (6)$$

شرط لازم و کافی برای تعادل یک جسم الاستیک، برابری کار خارجی مجازی صورت گرفته توسط نیروهای اعمالی به آن با کار داخلی مجازی انجام یافته توسط میدان تنش آن در طی تجربه کردن یک میدان تغییر مکان مجازی قابل قبول است. از آنجا که در حالت استاتیکی اصل همیتون و کار مجازی یکسان هستند، طبق اصل همیتون (یا کار مجازی) شرط در تعادل بودن جسم به صورت $\delta U - \delta W = 0$ بیان می‌شود. بنابراین برای استفاده از این اصل، ابتدا لازم است که وریشن‌های^۷ انرژی پتانسیل و کار را بدست آوریم. ابتدا از انرژی پتانسیل وریشن‌گیری می‌کنیم:

$$\delta U = \iiint_V (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta} + \sigma_{rz} \delta \gamma_{rz} + \sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}) dv \quad (7)$$

برای استفاده از رابطه (۷)، از روابط (۴) و (۵) کمک می‌گیریم. به طوری که با استفاده از حساب تغییرات داریم:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_r &= \delta u_{,r} + \delta(z\psi_{r,r}) = \frac{\partial}{\partial r} (\delta u) + z \frac{\partial}{\partial r} (\delta \psi_r) \\ \delta \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} [(\delta u) + z(\delta \psi_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta v) + z \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta \psi_\theta)] \\ \delta \gamma_{\theta z} &= [(\delta \psi_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta w)] \\ \delta \gamma_{rz} &= [(\delta \psi_r) + \frac{\partial}{\partial r} (\delta w)] \end{aligned} \quad (8)$$

بعد از وریشن‌گیری از کرنش‌ها، حال می‌توانیم نتایج حاصل را در رابطه (۷) جایگذاری کنیم. بعد از انجام این جایگذاری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint_V \{ \sigma_r [\frac{\partial}{\partial r} (\delta u) + z \frac{\partial}{\partial r} (\delta \psi_r)] + \frac{\sigma_\theta}{r} (\delta u + z \delta \psi_r + \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta v) + z \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta \psi_\theta)) + [\sigma_{r\theta} (\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta u) + z \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta \psi_r) - \delta v - \delta \psi_\theta) + \frac{\partial}{\partial r} (\delta v) + z \frac{\partial}{\partial r} (\delta \psi_\theta)] + [\sigma_{rz} (\delta \psi_r + \frac{\partial}{\partial r} (\delta w))] + [\sigma_{\theta z} (\delta \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta w))] \} r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (9)$$

برای ساده‌تر کردن روابط از تساوی‌های رابطه (۱۰) استفاده می‌کنیم:

8. Stress resultant
9. Moment resultant

7. Variation

حل عددی قطاع دایروی ساخته شده از مواد FGM تحت بار عرضی، با تکیه گاه ساده ...

روش تقریبی برای تبدیلات مشتقات یک تابع در نقطه‌ای واقع بر دامنه آن، بصورت ترکیب خطی از مقادیر تابع در تعدادی از نقاط درون دامنه تابع می‌باشد. این تعریف اولین بار توسط Bellman [۱۰] بیان شد. برای نشان دادن شکل ریاضی DQ، تابع $F(x)$ را بر روی بازه $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. مشتق مرتبه n ام این تابع در نقطه x_i بصورت زیر تعریف شده است:

$$\frac{d^n F(x_i)}{dx^n} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(n)} F(x_j) \quad i=1,2,\dots,N \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)، x_i نقاط دقت و $C_{ij}^{(n)}$ ضرایب وزنی مشتق مرتبه n ام می‌باشند. ضرایب وزنی به کمک توابع آزمایشگاهی لاگرانژ [۱۱] به صورت زیر محاسبه شده است:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_j) \prod(x_j)} \quad i,j=1,2,\dots,N, \quad i \neq j$$

$$C_{ij}^{(r)} = r[C_{ij}^{(r-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)}] \quad 2 \leq r \leq N-1$$

$$C_{ij}^{(m)} = - \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(m)} \quad m=1,2,\dots,N-1, \quad j \neq i \quad (18)$$

به طوری که:

$$\prod(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (19)$$

انتخاب نقاط دقت در همگرایی و دقت این روش بسیار موثر است. اثرات نقاط دقت متفاوت در همگرایی روش DQ توسط Wang [۱۲] برای کماتش صفحات مرکب مورد بررسی قرار گرفته است. برخی از انواع نقاط دقت در بازه $[a, b]$ عبارتند از: (نقاط دقت با فواصل مساوی)

$$x_i = a + \frac{i-1}{N-1} (b - a) \quad i=1,2,\dots,N \quad (20)$$

نقاط دقت با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبیشف:

$$x_i = a + 0.5 [1 - \cos(\frac{(2i-1)\pi}{2N})] (b - a) \quad (21)$$

نقاط دقت با استفاده از چند جمله‌ای لژاندر:

$$x_i = a + 0.5 [1 - \cos(\frac{(2i-3)\pi}{2N-4})] (b - a) \quad (22)$$

نقاط دقت با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ:

$$x_i = 0.5 [1 - \cos(\frac{(i-1)\pi}{N-1})] (b - a) \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (23)$$

در کار حاضر نقاط دقت با استفاده از چند جمله‌ای چبیشف بدست آورده شده‌اند.

بعد از تعریف کلی ارائه شده برای روش عددی تربیع دیفرانسیلی، به بیان مراحل مختلف حل یک مسئله با استفاده از این روش پرداخته شده است. برای حل مسئله با استفاده از این

$$W = \iint_A P_z(r, \theta) w r dr d\theta \quad (15)$$

$$\delta w = \iint_A P_z \delta w r dr d\theta$$

به طوری که $P_z(r, \theta)$ فشار 1^0 وارد بر سطح بالایی 1^1 ورق می‌باشد. با انتگرال گیری جزء به جزء از رابطه (۱۴) و استفاده از روابط (۱۱) و (۱۲) و در نهایت جایگذاری آن‌ها در رابطه مربوط به اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، معادلات تعادل حاکم بر ورق مورد نظر بدست آورده شده است. از آنجا که هر پنج وریشن از هم مستقل هستند و با توجه به رابطه مربوط به اصل حداقل انرژی پتانسیل کل $\delta w = \delta U$ پنج رابطه تعادل به صورت زیر بدست آورده شده است:

$$\begin{aligned} \delta u : -\frac{N_r}{r} - N_{r,r} + \frac{N_\theta}{r} - \frac{N_{r\theta,\theta}}{r} &= 0 \\ \Rightarrow N_{r,r} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta v : -\frac{N_{\theta,\theta}}{r} - \frac{N_{r\theta}}{r} - \frac{N_{r\theta}}{r} - N_{r\theta,r} &= 0 \\ \Rightarrow N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_r : -\frac{M_r}{r} - M_{r,r} + \frac{M_\theta}{r} - \frac{M_{r\theta,\theta}}{r} + Q_r &= 0 \\ \Rightarrow M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} - Q_r &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_\theta : -\frac{M_{\theta,\theta}}{r} - \frac{M_{r\theta}}{r} - \frac{M_{r\theta}}{r} - M_{r\theta,r} + Q_\theta &= 0 \\ \Rightarrow M_{r\theta,r} + \frac{1}{r} M_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta} - Q_\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w : -\frac{Q_r}{r} - Q_{r,r} - \frac{Q_{\theta,\theta}}{r} + P_z(r, \theta) &= 0 \\ \Rightarrow r Q_{r,r} + Q_{\theta,\theta} + Q_r = r P_z(r, \theta) & \quad (16) \end{aligned}$$

حل عددی در حالت بارگذاری مکانیکی ورق

دایروی ساخته شده از ماده FGM

بعد از استفاده از میدان جابه‌جایی و همچنین بکارگیری اصل مینیمم انرژی پتانسیل، معادلات حاکم بر ورق مورد نظر بدست آورده شد. سپس با فرمول‌بندی مجدد آن‌ها معادلات را مستقل کرده و به روش عددی حل شده است. در نهایت نیز کمیت‌های حاصل شده را با دبیره 1^2 مکانیک مقایسه کرده و اعتبار کارهای انجام شده در این تحقیق مشخص شده است.

روش عددی تربیع دیفرانسیلی (DQ)

روش تربیع دیفرانسیلی بر اساس روش عددی گوس برای محاسبه مشتق یک تابع که در تعداد محدودی از نقاط دامنه تابع که مقدار آن معلوم است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این

10. Pressure
11. Top surface
12. Literature

حل عددی به روش DQ

در این قسمت پاسخ‌های روش عددی تربیع دیفرانسیلی را بررسی شده است. برای انجام این کار طبق مراحل ذکر شده در روش DQ عمل کرده و مراحل را به ترتیب انجام دادیم. قابل ذکر است این روش عددی برای پنج معادله موجود در رابطه (۱۶) که یک دستگاه معادلات خطی است، استفاده شده و وقتی این دستگاه معادلات بر حسب جایجایی‌ها نوشته شوند، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه کلی ده رسیده‌ایم. از آن جایی که این دستگاه معادلات خط بوده، کار برای استفاده از این روش عددی بسیار آسان‌تر گشته، لازم به ذکر است، در این روش برای بدست آوردن نقاط دقت، از روش چبیشف استفاده شده است. بعد از بدست آوردن ضرایب وزنی و نقاط دقت، با استفاده از دستگاه معادلات موجود، معادلات را به فرم ماتریسی نوشته‌ایم. سپس با استفاده از این روش عددی، مشتقات مرتبه یک و دو موجود در دستگاه معادلات را با استفاده از روابط موجود بر حسب ترکیب خطی از توابع مربوط به هر کمیت نوشته‌ایم. بعد از انجام این کار، در دستگاه معادلات جدید اثری از مشتقات کمیت‌ها وجود نخواهد داشت. سپس لازم است که شرایط مرزی را بر روی این دستگاه اعمال کنیم. برای انجام این کار لازم است که در دستگاه معادلات جدید، ضرایب موجود در ماتریس که مربوط به گره اول و آخر بوده را صفر کرده و بجای این ضرایب، ضرایب متناسب با شرایط مرزی مورد نظر مقادیر را قرار دهیم. در انتها دستگاه معادلات را حل کرده و نتایج مربوط به هر کمیت را بدست آورده‌ایم.

جدول ۱ - مقایسه جابه‌جایی عرضی و منتهج گشتاور ماده درجه بندی شده تابعی قطاع دایروی به روش DQ تکیه گاه گیردار [۵].

θ_0	n	$\bar{w}(b/2, \theta_0/2)$	$\bar{M}_r(b, \theta_0/2)$	$\bar{M}_\theta(b/2, \theta_0/2)$
$\pi/6$	0.3	-1.7788	1.2879	-0.9121
	3	-1.3035	1.3064	-0.9109
$\pi/3$	0.3	-12.2021	3.2412	-2.0205
	3	-9.0598	3.2566	-2.0157
$\pi/2$	0.3	-27.3987	4.7745	-2.4424
	3	-20.4101	4.7855	-2.4378

present study (DQ)

θ_0	n	$\bar{w}(b/2, \theta_0/2)$	$\bar{M}_r(b, \theta_0/2)$	$\bar{M}_\theta(b/2, \theta_0/2)$
$\pi/6$	0.3	-1.7789	1.2892	-0.9121
	3	-1.3036	1.3078	-0.9108
$\pi/3$	0.3	-12.2020	3.2414	-2.0201
	3	-9.0597	3.2568	-2.0154
$\pi/2$	0.3	-27.3991	4.7743	-2.4420
	3	-20.4104	4.7852	-2.4373

روش در مرحله اول، معادلات حاکم بر مسئله و شرایط مرزی را بی بعد کرده و در مرحله دوم، با استفاده از تکنیک‌های متفاوت ناحیه حل به تعدادی گره محاسباتی توزیع شده و در مرحله سوم، ضرایب مورد نیاز برای تقریب مشتقات به کار رفته در معادلات اصلی و شرایط مرزی استخراج شده است که نهایتاً در مرحله چهارم، دستگاه معادلات خطی یا غیرخطی استخراج شده، با اعمال شرایط مرزی، حل شده و جواب‌های مورد نیاز استخراج شده است. لازم به ذکر است که اگر دستگاه مورد نظر خطی باشد با روش‌های تکراری (ژاکوبی، گوس سایدل و ...) و یا با استفاده از روش‌های مستقیم (حذفی گوس و ...) قابل حل می‌باشد. در مورد دستگاه‌های غیرخطی، قبل از استفاده از روش‌های تکراری یا مستقیم، باید با استفاده از روش نیوتن رافسون و ... دستگاه را خطی‌سازی کرده و سپس آن را حل کنیم.

حل تحلیلی قطاع دایروی

می‌خواهیم تمامی کمیت‌ها را برای حالت قطاع دایروی نیز به دست آوریم. تنها نکته‌ی حائز اهمیت این است که: ترم‌هایی که باعث بی‌نهایت شدن پاسخ در شعاع $r=0$ شده‌اند را باید حذف کرد. با مراجعه به معادلات مربوطه متوجه شدیم که به منظور بی‌نهایت نشدن پاسخ در شعاع $r=0$ باید ضرایب $A_{2m}, B_{3m}, B_{4m}, \bar{D}_{3m}$ و \bar{D}_{4m} را باید برابر صفر قرار دهیم و نتایج حاصل برای جابه‌جایی‌ها، تابع تنش و تابع لایه مرزی نوشته شده است:

$$\tilde{u}_m(r) = \frac{B_2}{A_2} \frac{\alpha_m}{\mu} \frac{1}{r} [A_{1m} I_{\alpha_m}(\mu r)] + \frac{B_2}{A_2} \alpha_m [\bar{D}_{1m} - \frac{1}{2B_2} B_{1m} + \frac{4\bar{D}}{K^2 A_2} (\alpha_m+1)\bar{D}_{2m}] r^{\alpha_m-1} + [(\frac{4A_1}{A} - \frac{(\alpha_m+2)}{2A_2}) B_{2m} + \frac{B_2}{A_2} (\alpha_m+2) \bar{D}_{2m}] r^{\alpha_m+1} - \frac{B_2}{DA_2} \tilde{q}'_{1m}$$

$$\tilde{v}_m(r) = \frac{B_2}{A_2} \frac{1}{\mu} [A_{1m} \frac{d}{dr} I_{\alpha_m}(\mu r)] - [(\frac{4A_1}{A} + \frac{\alpha_m}{2A_2}) B_{2m} - \frac{B_2}{A_2} \alpha_m \bar{D}_{2m}] r^{\alpha_m+1} - \frac{B_2}{A_2} \alpha_m [-\bar{D}_{1m} + \frac{1}{2B_2} B_{1m} - \frac{4\bar{D}}{K^2 A_2} (\alpha_m+1)\bar{D}_{2m}] r^{\alpha_m-1} - \frac{B_2 \alpha_m \tilde{q}_{1m}}{DA_2 r}$$

$$\tilde{w}(r) = \bar{D}_{1m} r^{\alpha_m} + \bar{D}_{2m} r^{\alpha_m+2} - \frac{1}{D} \tilde{q}_{1m} + \frac{1}{K^2 A_2} \tilde{q}_{2m}$$

$$\tilde{F}(r) = B_{1m} r^{\alpha_m} + B_{2m} r^{\alpha_m+2}$$

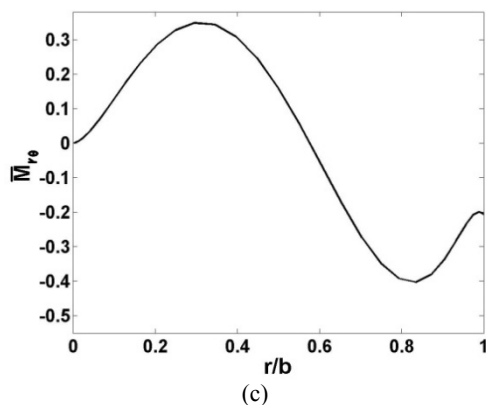
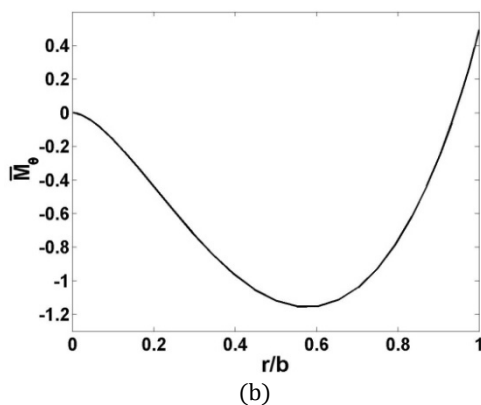
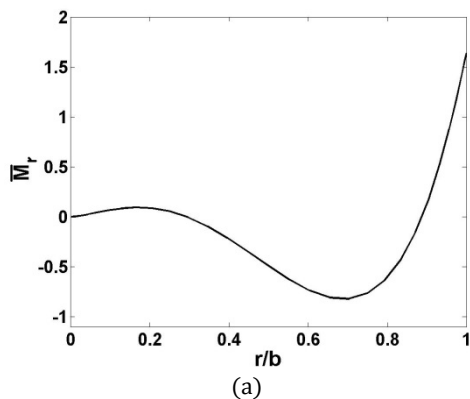
$$\tilde{\phi}(r) = A_{1m} I_{\alpha_m}(\mu r) + A_{2m} K_{\alpha_m}(\mu r)$$

(۲۴)

شرایط مرزی را در شعاع $r=b$ اعمال کرده و هر پنج ثابت را بدست آوردیم. با مشخص شدن این پنج ثابت، تمامی کمیت‌های مورد نظر به راحتی محاسبه شده‌اند.

حل عددی قطاع دایروی ساخته شده از مواد FGM تحت بار عرضی، با تکیه گاه ساده ...

واقع باعث کاهش مقدار این کمیت می شود. جدول شماره ۲ نیز به بررسی اثر زاویه قطاع و پارامتر n بر روی جابه جایی عرضی و منتجه گشتاور می پردازد.



شکل ۲- تغییرات منتجه گشتاور M_r (a)، M_θ (b) و $M_{r\theta}$ (c) قطاع دایروی شرایط مرزی C1 به روش DQ.

منحنی های رسم شده در شکل ۲ مربوط به منتجه های گشتاور در حالت شرایط مرزی گیردار C1 می باشند که به روش عددی تربیع مربعی بدست آمده و رسم شده اند. لازم به یادآوری است که، پارامترهای بی بعد موجود در این نمودارها همان پارامترهای بی بعد تعریف شده در قسمت قبل می باشند. همچنین پارامتر بی بعد مربوط به منتجه تنش همانند حالت بی بعد شده منتجه گشتاور تعریف شده است. برای رسم

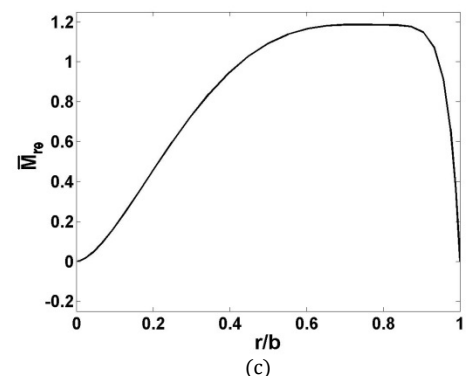
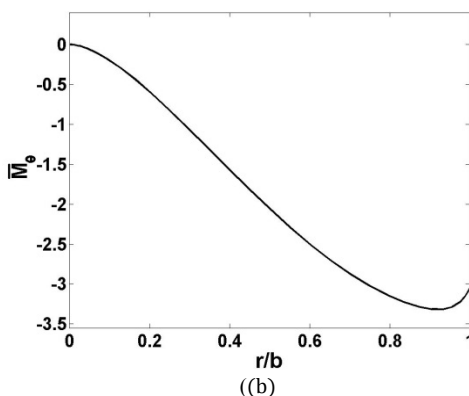
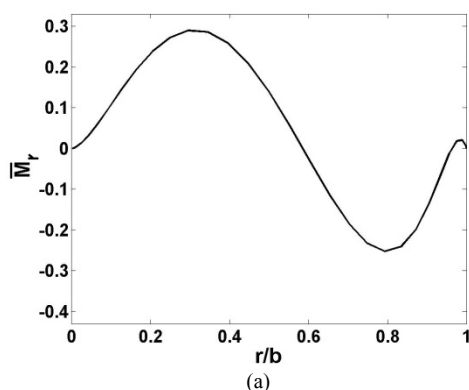
جدول ۲- مقایسه جابه جایی عرضی و منتجه گشتاور ماده درجه بندی شد. تابعی قطاع دایروی به روش DQ تکیه گاه ساده [۵].

θ_0	n		$\bar{w}(b/2, \theta_0/2)$	$\bar{M}_\theta(b/2, \theta_0/2)$
$\pi/6$	0.3	S1	-1.8867	-0.9629
		S2	-1.8874	-0.9642
	3	S1	-1.3859	-0.9627
		S2	-1.3865	-0.9642
$\pi/3$	0.3	S1	-16.2359	-2.5402
		S2	-16.2560	-2.5503
	3	S1	-12.1140	-2.5390
		S2	-12.1313	-2.5505
$\pi/2$	0.3	S1	-44.0347	-3.5087
		S2	-44.1038	-3.5215
	3	S1	-32.9767	-3.5071
		S2	-33.0361	-3.5217

present study (DQ)

θ_0	n		$\bar{w}(b/2, \theta_0/2)$	$\bar{M}_\theta(b/2, \theta_0/2)$
$\pi/6$	0.3	S1	-1.8866	-0.9628
		S2	-1.8873	-0.9641
	3	S1	-1.3859	-0.9626
		S2	-1.3865	-0.9641
$\pi/3$	0.3	S1	-16.2355	-2.5398
		S2	-16.2557	-2.5499
	3	S1	-12.1138	-2.5386
		S2	-12.1311	-2.5501
$\pi/2$	0.3	S1	-44.0355	-3.5082
		S2	-44.1046	-3.5210
	3	S1	-32.9772	-3.5066
		S2	-33.0366	-3.5212

همان طور که از داده های جداول ۱ و ۲ مشخص است، نتایج بدست آمده از روش عددی تربیع مربعی با مرجع [۱۳] مطابقت بسیار خوبی دارد. شایان ذکر است که نتایج در تکیه گاه گیردار در هر چهار حالت C1, C2, C3 و C4 یکسان هستند. همچنین نتایج در حالت تکیه گاه ساده در حالت های S1 و S3 و در حالت های S2 و S4 نیز مشابه هستند. به همین منظور برای جلوگیری از اضافه کاری، فقط یکی از حالت های مشابه در جداول آورده شده است. همان طور که از جدول ۱ قابل مشاهده است، با افزایش مقدار n مقدار جابه جایی عرضی ورق کاهش می یابد. علت این کاهش جابه جایی عرضی در ورق افزایش مقدار سختی ورق بر اثر افزایش مقدار n است. همچنین این افزایش در مقدار پارامتر n باعث افزایش منتجه گشتاور شعاعی در لبه بیرونی ورق می شود. اما اثر افزایش پارامتر n بر روی منتجه گشتاور محیطی هم راستا با جابه جایی عرضی بوده و در



شکل ۳- تغییرات منته گشتاور M_r (a)، M_θ (b) و $M_{r\theta}$ (c) قطاع دایروی شرایط مرزی آزاد به روش DQ.

منحنی های رسم شده در شکل ۳ مربوط به منته‌های گشتاور برای حالت شرایط مرزی آزاد هستند که به روش عددی تربیع مربعی رسم شده‌اند. در نمودار مربوط به منته گشتاور M_r همانند حالت تکیه گاهی گیردار و ساده، مقدار این کمیت از صفر در مرکز قطاع شروع شده و با افزایش مقدار کمی در شعاع، یعنی در نواحی نزدیک شعاع میانی، به بیشترین مقدار خود رسیده که با افزایش بیشتر شعاع، مقدار این کمیت مجدد به سمت صفر میل کرده و بعد از تجربه کردن مقادیر منفی، مجدد به سمت صفر میل کرده و در نهایت، در شعاع خارجی، دقیقاً برابر صفر شده است. در نمودار مربوط به منته گشتاور M_θ همانطور که مشاهده می‌شود، این کمیت در مرکز قطاع

منحنی‌های مربوطه و همچنین بدست آوردن کمیت‌هایی که در این بخش به روش عددی تربیع مربعی بدست آورده شده‌اند، از یازده گره استفاده شده است. هم چنین تمامی نمودارهای رسم شده در این قسمت به ازای زاویه رأس $\pi/4$ و مقدار $n=0/3$ رسم شده‌اند. مقدار تمامی کمیت‌ها نیز در زاویه $\pi/18$ محاسبه شده اند. بقیه پارامترها همانند قبل به قوت خود باقی هستند. همان‌طور که در شکل پیداست، در زوایای کوچک‌تر از 90° درجه هیچ یک از کمیت‌ها از جمله منته‌های گشتاور در هیچ نقطه‌ای نامحدود نمی‌شوند. همان‌طور که از شکل ۱ مشخص است، مقدار منته گشتاور M_r از مقدار صفر در مرکز قطاع دایروی شروع شده و در لبه خارجی قطاع به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد. در فاصله بین شعاع میانی و شعاع خارجی، این کمیت بیشترین تغییرات را از خود نشان داده، این در حالی است که در نزدیکی رأس قطاع این تغییرات ناچیز بوده است. منته گشتاور M_θ نیز در مرکز قطاع صفر می‌باشد. با دور شدن از مرکز، مقدار این کمیت کاهش یافته و در نزدیکی شعاع میانی به مقدار مینیمم خود رسیده است. از این نقطه مینیمم تا شعاع خارجی، مقدار این کمیت بطور پیوسته افزایش یافته، تا در شعاع خارجی به مقدار ماکزیمم خود برسد. در مورد منته گشتاور $M_{r\theta}$ می‌توان گفت که تغییرات این کمیت با دو نمودار قبل کمی تفاوت دارد. هرچند این کمیت نیز در مرکز قطاع صفر بوده ولی برخلاف دو نمودار قبل، بیشترین مقدار آن در شعاع خارجی قطاع رخ نداده بلکه مقدار ماکزیمم در نزدیکی شعاع میانی رخ داده و در نزدیکی شعاع خارجی به کمترین مقدار خود رسیده است.

شایان ذکر است که نمودارهای مربوط به منته‌های تنش N_r ، N_θ و $N_{r\theta}$ نیز از نظر ظاهری کاملاً شبیه به هم بوده و فقط از نظر مقدار عددی کمی با هم تفاوت داشته و تغییرات این سه کمیت در این حالت از شرایط تکیه‌گاهی بسیار ناچیز و تقریباً برابر صفر است. اما این نکته را یادآور شدیم که اگر چه این سه نمودار یادشده از لحاظ ظاهری بسیار شبیه به هم هستند، اما مقدار این سه کمیت در این نقاط گره متفاوت بوده است.

همچنین نمودارهای مربوط به منته‌های گشتاور و منته‌های تنش برای حالت شرایط مرزی ساده SI نیز از نظر ظاهری بسیار شبیه به نمودارهای متناظر با شرایط مرزی گیردار هستند. به همین منظور در این قسمت برای جلوگیری از تکرار، نمودارهای مربوطه برای شرایط مرزی ساده SI رسم نشده‌اند. مانند قبل، اگر چه نمودارهای متناظر در این دو حالت شرایط تکیه گاهی از لحاظ ظاهری به هم شبیه هستند، اما مقادیر این کمیت‌ها از نظر عددی با هم متفاوتند.

حل عددی قطاع دایروی ساخته شده از مواد FGM تحت بار عرضی، با تکیه گاه ساده ...

ورق‌ها به روش‌های کانترویچ و المان محدود منتهی شده است. در این تحقیق برای بدست آوردن میدان جابه‌جایی از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شد. سپس با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل^{۱۵} کل معادلات تعادل بدست آورده شد. بعد از حاصل شدن معادلات تعادل، با توجه به کوپل بودن این معادلات، توابع تنش و لایه مرزی معرفی شدند. با انجام این کار معادلات مستقل شده و سه معادله جدید مستقل براساس تابع تنش، تابع لایه مرزی و جابجایی عرضی بدست آمد. بعد از حل این معادلات، به بررسی پاسخ‌ها برای قطاع دایروی برای ماده درجه بندی شده تابعی پرداختیم. بعد از بررسی نتایج و مقایسه نتایج ملاحظه شد که نتایج بدست آمده در این تحقیق با دبیره مکانیک مطابقت بسیار خوبی دارند. بعد از بررسی‌های انجام شده ملاحظه شد که، در حالتی که زاویه قطاع دایروی بیشتر از ۹۰ درجه باشد، در نواحی نزدیک به مرکز بعضی از کمیت‌ها در نزدیکی مرکز قطاع تغییرات ناگهانی در مقدارشان رخ داده که این موضوع بدلیل ترم r ظاهر شده در مخرج این کمیت‌ها است. برای بررسی پاسخ‌ها در نزدیکی شعاع داخلی قطاع، هدف میل دادن شعاع داخلی قطاع به سمت صفر بوده است. با توجه به امکان‌پذیر نبودن این موضوع، از روش عددی تربیع دیفرانسیلی برای بررسی پاسخ‌ها در نزدیکی مرکز قطاع استفاده کردیم و تغییرات کمیت‌ها در نزدیکی مرکز قطاع، در زوایای بزرگتر از ۹۰ درجه نیز بدست آمد.

پیشنهادات برای ادامه پژوهش

در انتها لازم است که به مواردی اشاره شود که امکان ادامه تحقیق را فراهم می‌سازد. در این قسمت به برخی از این موارد اشاره می‌شود:

- بعد از بدست آمدن معادلات حاکم بر ورق دایروی مورد نظر و فرمول‌بندی مجدد آن‌ها، مشاهده شد که هر سه معادله مستقل حاصل شده مستقل از دستگاه مختصات هستند. بنابراین این امکان وجود دارد که بتوان این معادلات را به سایر ورق‌ها نیز بسط داد.
- با استفاده از روش پیشنهادی در تحلیل ارائه شده، می‌توان برای تحلیل ارتعاشات^{۱۶} و دینامیک این ورق‌ها نیز از این روش استفاده کرد.
- همچنین می‌توان فرمول‌بندی مجدد را در قالب تئوری‌های مرتبه بالاتر برشی نیز بررسی و نتایج را با هم مقایسه کرد.

دارای مقدار صفر بوده و با افزایش شعاع مقدار این کمیت کاهش پیدا کرده است. بعد از این که شعاع به نزدیکی لبه خارجی رسید، مقدار بسیار ناچیزی افزایش در این کمیت رخ داده اما در نمودار مربوط به منتهی گشتاور $M_{r\theta}$ همانطور که از شکل پیداست، نحوه تغییرات نسبت به دو نمودار دیگر متفاوت است. هر چند همچون دو نمودار دیگر مقدار این کمیت در مرکز قطاع صفر بوده، ولی با افزایش شعاع این مقدار به مقدار ماکزیمم خود میل کرده و در نواحی شعاع میانی، مقدار این کمیت تقریباً ثابت مانده و هنگامی که به نزدیکی شعاع خارجی رسیده شروع به کاهش کرده و نهایتاً در شعاع خارجی همانطور که انتظار می‌رفت، به صفر رسیده اما در نمودارهای منتهی تنش N_r ، N_θ و $N_{r\theta}$ مشاهده شده که، تغییرات این کمیت صفر بوده است. این، همان مقداری است که با توجه به شرایط مرزی انتظار حصول آن را داشتیم.

بعد از حاصل شدن اطمینان از صحت نتایج بدست آمده از حل عددی، نیاز است که پاسخ‌های بدست آمده برای کمیت‌ها در نزدیکی مرکز قطاع به ازای زوایای بزرگتر از ۹۰ درجه مورد بررسی قرار گیرد. بعد از بدست آمدن پاسخ‌ها به ازای زوایا و شرایط مرزی مختلف، مشاهده شد که نتایج بدست آمده از حل عددی مطابق انتظار است. بنابراین هر آنچه در مورد نحوه رفتار کمیت‌ها در نواحی نزدیک مرکز قطاع به ازای زوایای بزرگتر از ۹۰ درجه و شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد بیان شده در حل عددی صادق است.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

همان‌طور که گفته شد، مواد درجه‌بندی شده تابعی امروزه در صنایع مختلف، به‌خصوص صنعت هوافضا^{۱۳}، کاربرد بسیار زیادی دارند. این مواد وقتی که دارای دو فاز باشند، معمولاً از دو فاز با خواص متفاوت هستند. به‌طوری‌که بتوانند از مزیت‌های یکدیگر استفاده و معایب هم را پوشش دهند. خواص این مواد در راستای ضخامت تغییر کرده و مدل‌های مختلفی برای مدل‌سازی این مواد ارائه شده است. همچنین این مواد در هندسه‌های مختلفی از جمله: مستطیلی^{۱۴}، دایروی، حلقوی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای بررسی و بدست آوردن معادلات حاکم نیز از تئوری‌های مختلفی همچون تئوری الاستیسیته، کلاسیک، برشی مرتبه اول و ... استفاده شده است. با توجه به مشاهدات صورت گرفته در دبیره مکانیک، هیچ حل عددی برای ورق‌های قطاعی شکل ماده درجه بندی شده تابعی ارائه نشده است و تمام تحلیل‌های این

15. Total potential energy
16. Vibration analysis

13. Aero space industry
14. Rectangular

مراجع

- Graded Solid/Annular Sector Plates with Various Boundary Conditions,” *Acta Mechanica*, Vol. 228, Issue 7, 2017, pp 2655–2674.
- [8] S. Moita, L. Araújo, V. Correia, “Buckling and Nonlinear Response of Functionally Graded Plates under Thermo-Mechanical Loading,” *Composite Structures*, Vol. 202, No.15, 2018, pp. 719-730.
- [9] A.K., Baltacıoğlu, Ö., Civalek, B., Akgöz F. and Demir, “Free Vibration Analysis of Laminated and FGM Composite Annular Sector Plates,” *Curved and Layered Structures*, Vol. 4, Issue 1, 2019, pp.
- [10] R. Bellman, B. G. kashaf, J. Casti, “A Technique for The Raid Solution of Nonlinear Partial Differebtial Equations,” *J. Comput. phys.*, Vol. 10, 1972, PP. 40-5.
- [11] Shu, B.E. Richards, “Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Twodimensional in Compressible Navier-Stoke Equation,” *Int. Journal of Num. Math. Fluids*, Vol. 15, 1992, pp. 791-798.
- [12] X. Wang, “Differential Quadrature for Buckling Analysis of Laminated Plates,” *Computers & Structures*, Vol. 57, 1995, pp. 715-719.
- [13] F. Fallah. A. Nosier, Thermo-Mechanical Behavior of Functionally Graded Circular Sector Plates, *Acta Mech.* Vol. 226, Issue 1, 2014, pp 37–54.
- [14] M. Jelokhani Niaraki, A Numerical And Analytical Solution of A Circular Section Made of Functionally Graded Material (FGM) Under A Transverse Load, With A Simple Support on The Radial Edges, (Master Thesis), Islamic Azad University of Central Tehran Branches, 2016.
- [1] M. Koizumi, “The Concept of FGM,” *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, Vol. 34, 1993, pp. 3-10.
- [2] Y. Fukui, “Fundamental Investigation of Functionally Gradient Material Manufacturing System using Centrifugal Force,” *JSME Int. J. Series111*. Vol. 34, No. 1, 1991, pp. 144-148.
- [3] E. Jomehzadeh, A. R. Saidi, S. R. Atashipour, “An Analytical Approach for Stress Analysis of Functionally Graded Annular Sector Plates,” *Materials and Design*, 30, 2009, pp. 3679–3685.
- [4] Nosier, F. Fallah, “Non-linear Analysis of Functionally Graded Circular Plates under Asymmetric Transverse Loading,” *Int. J.Non-Linear, Mech.* 44, 2009, pp. 928 - 942.
- [5] A. Nosier, F. Fallah, “Reformulation of Mindlin–Reissner Governing Equations of Functionally Graded Circular Plates,” *Acta Mech.* 198, 2008, pp. 209–233.
- [6] T. Bui, T. Van Do, L. Ton, D. Doan, S. Tanaka, Dat Tien Pham, Thien-An Nguyen-Van, “On the High Temperature Mechanical Behaviors Analysis of Heated Functionally Graded Plates Using FEM and a New Third-order Shear Deformation Plate Theory,” *Composites Part B*, Vol. 92, 2016, pp. 218-241.
- [7] F. Fallah, A. Khakbaz, “On an Extended Kantorovich Method for The Mechanical Behavior of Functionally