

(علمی - ترویجی)

طراحی قانون هدایت بهبود یافته در حضور دینامیک عملگر با ایده گام به عقب

در این مقاله، با در نظر گرفتن دینامیک عملگر به طراحی قانون هدایت در یک مسئله هدایت دو بعدی پرداخته شده است. برای دستیابی به این هدف، با استفاده از رویکرد گام به عقب، روش هدایت تناسبی به گونه‌ای تغییر داده شده تا پایداری سیستم حلقه بسته با وجود دینامیک عملگر تضمین شود. از این رو، سعی بر آن است که عملکرد حلقه هدایت (برای مثال مشخصات پاسخ گذرا و فاصله از دست‌دهی) با الگوریتم هدایت پیشنهادی در مقایسه با قانون هدایت تناسبی تا حد امکان بهبود داده شود. برای این منظور، با به کارگیری ایده گام به عقب و نظریه پایداری لیاپانوف، قانون هدایت کلاسیک به گونه‌ای اصلاح خواهد شد تا حلقه هدایت در حضور دینامیک عملگر پایدار مجانبی شود. الگوریتم هدایت پیشنهادی در یک مسئله هدایت نوعی شبیه‌سازی می‌شود. نتایج به دست آمده کارایی الگوریتم هدایت اصلاح شده را در مقایسه با قانون هدایت تناسبی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: هدایت تناسبی، فاصله از دست‌دهی، دینامیک عملگر، ایده گام به عقب

علی یوسف‌پور^۱، دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس
ولی‌الله غفاری^{۲*}، استادیار، گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس

* نویسنده مخاطب، آدرس: بوشهر،
کدپستی: ۷۵۱۶۹۱۳۸۱۷

Improved Guidance Law Design in Presence of Actuator Dynamic via Back-stepping Approach

This paper concerns on guidance law design by considering of the actuator effect. For achieving this goal, the proportional guidance (PN) method would be modified via the back-stepping approach such that the closed-loop stability is guaranteed in the presence of the actuator dynamic. Thus, it is interested to improve the guidance system performance (for example the transient response characteristic and miss-distance error) by the proposed guidance algorithm. Hence, the PN guidance law would be corrected such that the closed-loop system is asymptotically stabilized. The suggested algorithm is numerically simulated in a typical guidance problem. The simulation results verify the effectiveness of the redesigned guidance technique in comparison with the PN method.

Keywords: Proportional Navigation, Miss-distance error, Actuator Dynamic, Back-stepping Approach

A. Yousefpoor¹, M.Sc. Student, Department of Electrical Engineering, School of Engineering, Persian Gulf University, Bushehr

V. Ghaffari^{2*}, Assistant Professor, Department of Electrical Engineering, School of Engineering, Persian Gulf University, Bushehr

*Corresponding Author, Postal Code: 7516913817, Bushehr, IRAN

vghaffari@pgu.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه با رشد سریع تکنولوژی، موارد استفاده از الگوریتم‌ها و قوانین هدایت در زمینه‌هایی همچون هوافضا (هواپیمای بدون سرنشین)، صنعت خودروسازی (خودروهای خودران) و طراحی انواع پرنده‌ها برجسته‌تر شده است. در نتیجه سیستم‌های هدایت کارآمد جزء جدایی‌ناپذیر صنعت هوایی و صنایع روز دنیا شده است. در صنعت هوافضا غالب سیستم‌های هدایت براساس اندازه‌گیری تغییرات زاویه خط دید است. از این‌رو، برای پاسخ به این نیاز مستلزم به طراحی، بررسی و بهبود سیستم‌های هدایت جدید و در عین حال کارآمد و بهینه است که در مقایسه با الگوریتم‌های گذشته دقیق‌تر و سریع‌تر باشد.

از مشهورترین و پرکاربردترین الگوریتم هدایت، به دلیل سادگی و سهولت می‌توان به قانون هدایت تناسبی اشاره کرد [۱]. در قانون هدایت تناسبی اساس کار به این صورت است که فرمان هدایت (شتاب جانبی) به‌گونه‌ای محاسبه و تولید می‌شود تا در حین حرکت تغییرات زاویه‌ای خط دید بین جسم و هدف صفر شود. فرمان هدایت تناسبی متناسب با تغییرات زاویه خط دید و سرعت نزدیک‌شوندگی جسم با هدف است. بدیهی است با صفر شدن تغییرات زاویه خط دید، پرواز جسم با زاویه ثابتی انجام شده و در نهایت جسم به هدف مورد نظر خواهد رسید.

در مسائل هدایت نیاز به وجود مدل‌های واقعی و دقیق از معادله جسم و هندسه درگیری و مسیر حرکت هدف است. به منظور ارزیابی عملکرد حلقه هدایت (برای مثال فاصله از دست‌دهی)، این مدل ریاضی باید شامل ویژگی‌های دینامیکی و غیرخطی مسئله هدایت بوده که ممکن است بر کارکرد سیستم هدایت تأثیر داشته باشد [۲]. از آنجاکه روش هدایت تناسبی در غیاب روابط مدل نشده (عدم قطعیت) خوب عمل می‌کند اما در صورت وجود دینامیک عملگر ممکن است پایداری یا عملکرد سیستم هدایت به طرز چشمگیری کاهش یابد.

هدف از این مقاله استخراج یک قانون هدایت بهبود یافته در حضور دینامیک عملگر برای برطرف کردن مشکلات ایجاد شده با قانون هدایت تناسبی می‌باشد. مرسوم‌ترین روش برای مدل‌سازی ریاضی عملگر استفاده از یک مدل دینامیکی خطی و نامتغیر با زمان (مانند تابع تبدیل مرتبه‌اول) است. از آنجاکه تابع مرتبه اول دارای یک قطب است، حال اگر به یک سیستم حلقه بسته یک قطب اضافه کنیم پایداری سیستم حلقه بسته به هم خواهد خورد. پس طبیعی است که انتظار داشته باشیم که با وجود دینامیک عملگر به پایداری یا آن عملکردی که از قبل مدنظر داشتیم دست نخواهیم یافت.

برای طراحی قانون هدایت کارآمد در شرایط ذکر شده، بایستی از مفاهیم و روش‌های موجود در تحلیل و طراحی سیستم‌های غیرخطی از قبیل نظریه پایداری لیاپانف [۳-۴]، روش مد لغزشی [۵]، ایده گام به عقب [۶-۷]، رویکرد بهینه [۸]، طراحی مقاوم [۹]، روش‌های پایدار در زمان محدود [۱۱-۱۰] و منطق فازی [۱۳-۱۲] استفاده نمود. مسئله هدایت و طراحی الگوریتم هدایت، ابتدا برای سیستم هدایت دوبعدی توسعه داده شده است. طراحی و انتخاب قانون هدایت برای سیستم هدایت سه‌بعدی نیز می‌تواند تعمیم داده شود [۱۴، ۲۰-۱۹]. با در نظر گرفتن مدل جستجوگر، رفتار معادلات هدایت با الگوریتم هدایت تناسبی می‌تواند بررسی شود [۱۵]. قانون هدایت تناسبی در نسخه اولیه، برای یک حلقه هدایت ساده مطرح شد. سپس، با وجود محدودیت‌های سیستم هدایت قانون هدایت تناسبی تصحیح شد [۱۸-۱۷]. به‌طور معمول عملگر مورد استفاده در پرنده‌ها، دارای خاصیت لختی یا دینامیکی است. وجود خاصیت دینامیکی در حلقه هدایت به شیوه‌های مختلفی از قبیل در نظر گرفتن مدل سنسور، عملگر و غیره می‌تواند بررسی شود. با نوشتن معادلات حرکت مشاهده می‌شود در معادلات توصیف‌کننده سیستم هدایت، شکل و ساختار معادلات به‌گونه‌ای است که روش گام به عقب را می‌توان به‌طور مستقیم برای تصحیح و بازطراحی قانون هدایت به کار برد. از این‌رو، استفاده از ایده گام به عقب و نظریه پایداری لیاپانف برای جبران اثر دینامیک عملگر مهم‌ترین هدف این مقاله در مقایسه با مطالعات موجود می‌باشد. بدین منظور، در قدم اول این مطالعه بدون وجود مدل عملگر قانون هدایت مناسبی استخراج می‌شود. سپس، برای عملگر یک مدل دینامیکی معلوم پایدار (تابع تبدیل مرتبه اول و سپس تابع تبدیل مرتبه بالا) در نظر گرفته خواهد شد. با ایده گام به عقب، قانون هدایت تناسبی به‌گونه‌ای اصلاح خواهد شد تا اثر دینامیک عملگر بر پایداری و عملکرد حلقه هدایت جبران شود. اگرچه پایدار مجانبی شدن حلقه هدایت با قانون هدایت پیشنهادی به‌صورت تحلیلی و ریاضی اثبات می‌شود. همچنین، در یک مثال عددی نیز نتایج به دست آمده استفاده می‌شود تا کارایی رویکرد پیشنهادی در مقایسه با هدایت تناسبی نشان داده شود.

بنا بر آنچه مطرح شد، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم هدایت در بخش دوم بیان می‌شود. سپس، در بخش سوم با در نظر گرفتن دینامیک عملگر (مرتبه اول و مرتبه بالاتر)، با ایده گام به عقب و تحلیل پایداری لیاپانف روش هدایت تناسبی به نحو مناسبی اصلاح خواهد شد. در بخش چهارم، نتایج به دست آمده در یک مسئله هدایت دوبعدی

طراحی قانون هدایت بهبود یافته در حضور دینامیک عملگر با ایده گام به عقب

به منظور رسیدن به معادله هدایت، متغیرهای نیاز است که عبارتند از:

$$w = \dot{\varphi}_T V_T \cos(\lambda - \varphi_T),$$

$$u = \dot{\varphi}_M V_M \cos(\lambda - \varphi_M),$$

$$w_r = \dot{\varphi}_T V_T \sin(\lambda - \varphi_T),$$

$$u_r = \dot{\varphi}_M V_M \sin(\lambda - \varphi_M),$$

که در آن، w و u به ترتیب بیانگر شتاب جانبی جسم و هدف است. همچنین، متغیرهای w_r و u_r به ترتیب شتاب شعاعی جسم و هدف می‌باشد. برای تغییرات زاویه جسم برحسب مؤلفه‌های شتاب جانبی جسم u داریم:

$$\dot{\varphi}_M = \frac{u}{V_M \cos(\lambda - \varphi_M)}. \quad (5)$$

همچنین، تغییرات زاویه هدف $\dot{\varphi}_T$ برحسب مؤلفه‌های شتاب جانبی هدف w به صورت رابطه (۶) بیان می‌شود.

$$\dot{\varphi}_T = \frac{w}{V_T \cos(\lambda - \varphi_T)} \quad (6)$$

از این رو، رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{r} = r\dot{\lambda}^2 + w_r - u_r. \quad (7)$$

همچنین، برای رابطه (۴) داریم:

$$r\ddot{\lambda} = -2\dot{r}\dot{\lambda} + w - u. \quad (8)$$

در یک حلقه هدایت، فرمان هدایت $u(t)$ بایستی به نحوی انتخاب شود تا زاویه خط دید تغییراتی نداشته باشد. در نتیجه زاویه خط دید به مقدار ثابتی همگرا شود $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\lambda}(t) = 0$. با تعریف متغیر جدید سرعت نزدیک شونده $v_c = -\dot{r}$ داریم:

$$v_c = V_M \cos(\lambda - \varphi_M) - V_T \cos(\lambda - \varphi_T). \quad (9)$$

همچنین، با تعریف متغیر $\lambda = x$ نرخ (تغییرات) زاویه خط دید از رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$x = -\frac{1}{r}(V_T \sin(\lambda - \varphi_T) + V_M \sin(\lambda - \varphi_M)) \quad (10)$$

با توجه به معادله (۷)، برای دینامیک تغییرات زاویه خط دید می‌توانیم داشته باشیم:

$$\dot{x} = \frac{1}{r}(2v_c x + w - u). \quad (11)$$

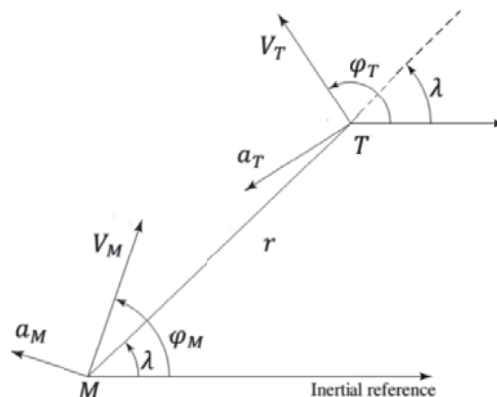
بنابراین، سیستم هدایت دوبعدی (صفحه‌ای) با معادله دیفرانسیل (۱۱) توصیف می‌شود. در نتیجه طراحی الگوریتم هدایت به انتخاب مناسب فرمان هدایت u منجر خواهد شد.

لم ۱: در یک سیستم هدایت دوبعدی توصیف شده با معادلات (۱) و (۲)، قانون هدایت $u = u_{PN} = Nv_c x + w$ با شرط $N > 2$ پایداری حلقه هدایت را تضمین خواهد نمود. در قانون هدایت u_{PN} ، N ثابت ناوبری می‌باشد.

شبه‌سازی و کارایی آن با قانون هدایت کلاسیک مقایسه می‌شود. در بخش پنجم، نتیجه‌گیری مقاله بیان خواهد شد.

۲- بیان مسئله هدایت

در دستگاه مختصات اینرسی مسئله رهگیری دوبعدی، به صورت شکل ۱ نشان داده می‌شود. در این شکل، r فاصله نسبی جسم تا هدف، V_M بیانگر سرعت جسم و V_T نشان‌دهنده سرعت هدف است. در این پژوهش برای سادگی تحلیل و طراحی قانون هدایت، سرعت‌های جسم و هدف مقادیر ثابتی فرض شده است. متغیر φ_M بیانگر زاویه جسم و φ_T زاویه هدف در دستگاه مختصات اینرسی می‌باشد. همچنین، زاویه خط دید جسم با هدف در دستگاه مختصات اینرسی با λ نمایش داده شده است.



شکل (۱): شمای مسئله رهگیری در دستگاه مختصات اینرسی [۱۶].

با توجه به شکل ۱، سرعت نسبی بین جسم و هدف با رابطه زیر بیان می‌شود [۲]:

$$\dot{r} = V_T \cos(\lambda - \varphi_T) - V_M \cos(\lambda - \varphi_M), \quad (1)$$

و سرعت در راستای عمود بر زاویه خط دید به صورت زیر می‌باشد [۲]:

$$r\dot{\lambda} = -V_T \sin(\lambda - \varphi_T) - V_M \sin(\lambda - \varphi_M). \quad (2)$$

با مشتق‌گیری از معادله‌های (۱) و (۲)، برای شتاب نسبی جسم و هدف در راستای زاویه خط دید داریم:

$$\ddot{r} = r\dot{\lambda}^2 + \dot{\varphi}_T V_T \sin(\lambda - \varphi_T) - \dot{\varphi}_M V_M \sin(\lambda - \varphi_M). \quad (3)$$

همچنین، معادله شتاب در راستای عمود بر زاویه خط دید به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$r\ddot{\lambda} = -2\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{\varphi}_T V_T \cos(\lambda - \varphi_T) - \dot{\varphi}_M V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \quad (4)$$

در این رابطه، ثابت ناوبری $N > 2$ بوده و تابع $\rho(t)$ نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho(t) = \frac{V_T \cos(\lambda(t) - \varphi_T(t))}{V_M \cos(\lambda(t) - \varphi_M(t))}$$

آنگاه سیستم هدایت پایدار مجانبی شده و تغییرات زاویه خط دید، صفر خواهد شد. با توجه به اینکه سرعت وسیله V_M بیشتر از سرعت هدف V_T بوده، بدیهی است در صورت ثابت بودن مقدار زاویه خط دید، وسیله به هدف مورد نظر خواهد رسید.

در یک سیستم هدایت نوعی، با انجام شبیه‌سازی عددی (به بخش ۴ رجوع شود) مشاهده می‌شود که وجود لختی (مدل مرتبه اول) در حلقه هدایت می‌تواند کارایی سیستم هدایت را تحت تأثیر قرار دهد. بنابراین، تغییر و اصلاح قانون هدایت با وجود دینامیک عملگر امری ضروری است.

۳- اصلاح قانون هدایت تناسبی با در نظر گرفتن مدل عملگر

در این بخش، به منظور بهبود پایداری و عملکرد سیستم حلقه بسته، ابتدا یک تابع تبدیل مرتبه اول برای مدل‌سازی عملگر در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از نظریه پایداری لیاپانف و ایده گام به عقب، قانون هدایت تناسبی اصلاح خواهد شد. سپس، با در نظر گرفتن تابع تبدیل مرتبه بالا برای دینامیک عملگر، قانون هدایت به گونه‌ای تغییر داده خواهد شد تا پایداری حلقه هدایت تضمین شود.

۳-۱- طراحی قانون هدایت با وجود دینامیک مرتبه اول برای عملگر

مطابق شکل ۲، مسئله هدایت بیان شده با معادله (۱۱) به صورت معادلات زیر قابل تعمیم می‌باشد:

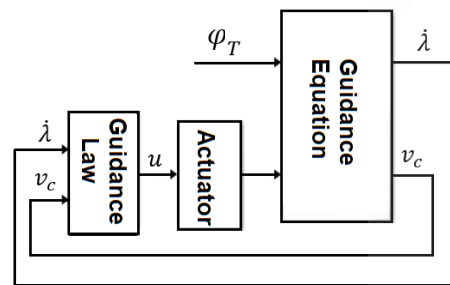
$$\dot{x} = \frac{1}{r}(2v_c x + w - \xi), \quad (13)$$

$$\dot{\xi} = \frac{1}{T}(-\xi + u). \quad (14)$$

معادله (۱۳) مربوط به تغییرات زاویه خط دید و رابطه (۱۴) توصیف عملگر با یک دینامیک مرتبه اول است. در رابطه (۱۴)، پارامتر $T > 0$ بیانگر ثابت زمانی عملگر می‌باشد. در این مقاله، برای طراحی قانون هدایت از رویکرد گام به عقب استفاده می‌شود. در روش گام به عقب معادلات سیستم را به دو یا چند دسته تقسیم می‌کنند. سپس، از دسته روابطی که شامل ورودی

اثبات: با انتخاب تابع لیاپانف $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، مشتق آن نسبت به زمان $\dot{V}(t) = -\frac{1}{r}(N-2)v_c x^2$ خواهد شد. بنابراین، حلقه هدایت پایدار مجانبی شده ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$) و زاویه خط دید به مقدار ثابتی همگرا می‌شود.

در معادله دیفرانسیل (۱۱)، سرعت نزدیک‌شوندگی جسم به هدف می‌باشد. برای طراحی قانون هدایت از رابطه (۱۱) و برای شبیه‌سازی مسئله هدایت از معادله‌های دیفرانسیل (۱)، (۲)، (۵) و (۶) استفاده می‌شود. یکی از معیارهای که برای بررسی عملکرد یک سیستم هدایت، مقایسه فاصله از دست‌دهی الگوریتم‌های هدایت مختلف است. قوانین هدایت استفاده شده در زمینه هوافضا به‌طور قابل توجهی تغییر نکرده و قانون ناوبری تناسبی همچنان توسعه داده می‌شود [۱۵]. روش هدایت تناسبی یکی از پرکاربردترین و مقاوم‌ترین الگوریتم‌های هدایت موجود است. اما این روش هدایت دارای نقاط ضعفی می‌باشد. برای مثال، اگر از قانون هدایت تناسبی در صورت وجود دینامیک عملگر برای رهگیری هدف استفاده شود، باعث به وجود آمدن فاصله از دست‌دهی قابل ملاحظه‌ای در عملکرد سیستم هدایت می‌شود. در این مقاله این موضوع مدنظر است که با لحاظ کردن دینامیک عملگر، خطای فاصله از دست‌دهی که مربوط به کارآمدی الگوریتم هدایت پیشنهادی است نسبت به قانون هدایت تناسبی تا حد امکان کوچک شود. در نتیجه پایداری و کارایی سیستم هدایت بهبود داده شود. از این‌رو، در گام نخست این پژوهش با در نظر گرفتن یک تابع تبدیل مرتبه اول در مسئله هدایت، مطابق شکل ۲ لزوم اصلاح قانون هدایت تناسبی بررسی خواهد شد.



شکل (۲): بلوک دیاگرام مسئله هدایت با در نظر گرفتن اثر عملگر.

در معادلات (۱) و (۲)، اگر فرمان زاویه سمت جسم $\varphi_M(t)$ به صورت رابطه (۱۲) انتخاب شود.

$$\varphi_M(t) = \varphi_M(t_0) + \int_{t_0}^t \rho(\tau) \varphi_T(\tau) d\tau + N \int_{t_0}^t (1 - \rho(\tau)) \lambda(\tau) d\tau \quad (12)$$

طراحی قانون هدایت بهبود یافته در حضور دینامیک عملگر با ایده گام به عقب

$$u(t) = \xi(t) + \frac{T}{\gamma_1} x(t) + T\dot{u}_{PN}(t) - T \left(\frac{v_c(t)}{2r} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) (\xi(t) - u_{PN}(t)) \quad (20)$$

بدیهی است که اگر ثابت زمانی عملگر ناچیز باشد ($T \rightarrow 0$)، آن وقت الگوریتم هدایت پیشنهادی به روش هدایت تناسبی منجر خواهد شد.

در نسخه اولیه قانون هدایت تناسبی فقط یک سیستم x وجود دارد و طراحی قانون هدایت برای آن انجام می‌شود. به همین دلیل در روش کلاسیک، تابع لیاپانف به فرم مربعی $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ برای انتخاب می‌شود. در روش هدایت پیشنهادی برای در نظر گرفتن اثر عملگر (زیرسیستم ξ)، با ایده گام به عقب تابع لیاپانف به صورت $V(x, \xi) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\gamma_1}{2r}(\xi - u_{PN})^2$ انتخاب شده است. سپس، قانون هدایت به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا پایداری مجانبی حلقه هدایت با وجود دینامیک عملگر تضمین شود. به طریق مشابه برای تصحیح قانون هدایت، ایده گام به عقب را می‌توان برای عملگر با تابع تبدیل مرتبه بالاتر نیز تعمیم داد. به همین منظور، در ادامه به اصلاح قانون هدایت با وجود مدل مرتبه بالا برای عملگر پرداخته شده است.

۳-۲- طراحی قانون هدایت با در نظر گرفتن دینامیک مرتبه بالاتر برای عملگر

در بخش قبل، بدون وجود مدل عملگر معادله سیستم هدایت به رابطه (۱۱) زیر بیان شد. مطابق شکل ۲ و با لحاظ نمودن دینامیک عملگر، معادله حاکم بر مسئله هدایت در فضای حالت به صورت روابط زیر قابل تعمیم خواهد بود:

$$\dot{x} = \frac{1}{r}(2v_c x + w - \xi), \quad x \in R, \quad (21)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = A\eta + Bu, \\ \xi = C\eta. \end{cases} \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)، یک دینامیک خطی و نامتغیر با زمان برای مدل ریاضی عملگر انتخاب شده است. همچنین، $\eta \in R^n$ بردار حالت عملگر می‌باشد. پس تابع تبدیل عملگر $G(s)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (23)$$

از این‌رو، مدل عملگر با تابع تبدیل مرتبه n زیر می‌توان نوشته شود:

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}. \quad (24)$$

کنترل نیست، با در نظر گرفتن یک ورودی مجازی، طراحی الگوریتم هدایت آغاز می‌شود. این دسته معادلات با استفاده از تحلیل پایداری لیاپانف پایدار مجانبی می‌شود. در نهایت، آن دسته معادلاتی که شامل ورودی است پایدار مجانبی می‌شود.

قضیه ۱: سیستم هدایت دوبعدی توصیف شده با روابط (۱۳) و (۱۴) را در نظر بگیرید. اگر قانون هدایت تناسبی به صورت رابطه زیر تغییر یابد:

$$\begin{cases} u = \xi + \frac{T}{\gamma_1}x + T\dot{u}_{PN} \\ -T \left(\frac{v_c}{2r} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) (\xi - u_{PN})' \\ u_{PN} = Nv_c x + w \end{cases} \quad (15)$$

آن وقت پایدار مجانبی حلقه هدایت با وجود دینامیک مرتبه اول برای عملگر تضمین خواهد شد. در قانون هدایت (رابطه ۱۵) ثابت‌های $\gamma_1 > 0$ ، $\gamma_2 > 0$ و $N > 2$ است.

اثبات: تابع لیاپانف مربعی انتخاب می‌کنیم که عبارتست از:

$$V(x, \xi) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\gamma_1}{2r}(\xi - u_{PN})^2, \quad \gamma_1 > 0. \quad (16)$$

از تابع لیاپانف رابطه (۱۶) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \xi) &= \frac{1}{r}x(2v_c x + w - \xi) + \\ &\frac{1}{T} \frac{\gamma_1}{r} (\xi - u_{PN})(-\xi + u - T\dot{u}_{PN}) \\ &- \frac{\gamma_1 \dot{r}}{2r^2} (\xi - u_{PN})^2. \end{aligned} \quad (17)$$

با ساده‌سازی معادله (۱۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \xi) &= -\frac{1}{r}(N-2)v_c x^2 + \frac{1}{r}(\xi - u_{PN}) \\ &\left(-x + \frac{\gamma_1}{T}(-\xi + u - T\dot{u}_{PN}) \right. \\ &\left. - \frac{\gamma_1 \dot{r}}{2r}(\xi - u_{PN}) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

در نهایت، با جایگذاری قانون هدایت پیشنهادی و با ساده‌سازی به رابطه (۱۹) می‌رسیم.

$$\dot{V}(x, \xi) = -\frac{(N-2)v_c x^2}{r} - \frac{\gamma_2}{r}(\xi - u_{PN})^2 \quad (19)$$

تابع لیاپانف $V(t)$ انتخابی اکیداً مثبت بوده و مشتق آن نسبت به زمان $\dot{V}(t)$ اکیداً منفی است. پس طبق نظریه پایداری لیاپانف، قانون هدایت پیشنهاد شده با رابطه (۲۰) می‌تواند با در نظر گرفتن دینامیک عملگر (با تابع تبدیل مرتبه اول) حلقه هدایت را پایدار مجانبی کند.

معادله (۲۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{V}(x, \xi) = -\frac{1}{r}(N-2)v_c x^2 + \frac{1}{r}(\xi - u_{PN}) \left(-x + \gamma_1(CA\eta + CBu - \dot{u}_{PN}) - \frac{\gamma_1 \dot{r}}{2r}(\xi - u_{PN}) \right) \quad (28)$$

در نهایت، با ساده‌سازی معادله (۲۸)، به رابطه زیر دست خواهیم یافت:

$$\dot{V}(x, \xi) = -\frac{1}{r}(N-2)v_c x^2 - \frac{\gamma_2}{r}(\xi - u_{PN})^2. \quad (29)$$

تابع لیاپانف $V(t)$ اکیداً مثبت و مشتق آن نسبت به زمان اکیداً منفی است. پس طبق نظریه پایداری لیاپانف، با در نظر گرفتن مدل مرتبه بالا برای دینامیک عملگر، قانون هدایت پیشنهاد شده با رابطه زیر می‌تواند حلقه هدایت را پایدار مجانبی کند:

$$u(t) = \frac{1}{CB} \left(\frac{1}{\gamma_1} x(t) + \dot{u}_{PN}(t) - CA\eta(t) - \left(\frac{v_c(t)}{2r(t)} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) (\xi(t) - u_{PN}(t)) \right) \quad (30)$$

در قضیه ۲ در حالتی که دینامیک عملگر از مرتبه n و درجه نسبی آن یک ($CB \neq 0$) می‌باشد، با استفاده از ایده گام به عقب و نظریه پایداری لیاپانف، قانون هدایت طراحی شده است. قانون هدایت ارائه شده در قضیه ۲، وابسته به بردار حالت و پارامترهای فضای حالت دینامیک عملگر می‌باشد. بدیهی است قانون هدایت قضیه ۲ فرم عمومی‌تری از قانون هدایت پیشنهاد شده در قضیه ۱ است.

مشابه با روابط فوق، ایده گام به عقب را حتی می‌توان برای عملگر با درجه نسبی بیشتر از یک نیز تعمیم داد. با وجود درجه نسبی ρ برای عملگر، معادلات سیستم هدایت به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{r}(2v_c x + w - \xi), \\ \xi^{(\rho)} = CA^\rho \eta + CA^{\rho-1} Bu. \end{cases}$$

در چنین شرایطی به تعداد درجه نسبی ρ می‌بایست از روش گام به عقب استفاده شود. در استفاده از این روش تنها کافی است دینامیک صفر تابع تبدیل $G(s)$ پایدار باشد. مینیمم فاز بودن تابع تبدیل عملگر، پایدار بودن دینامیک صفر را برآورده می‌نماید. در ادامه، برای نشان دادن کارایی روش هدایت پیشنهادی رابطه (۱۵) به شبیه‌سازی یک مسئله هدایت دوعدی پرداخته می‌شود.

فرض: تابع تبدیل عملگر $G(s)$ مینیمم فاز بوده و درجه نسبی آن یک است.

در یک سیستم هدایت نوعی، عملگر می‌تواند دارای تابع تبدیل مرتبه اول یا دوم یا مرتبه بالاتری باشد. به عنوان مثال، عملگرهای هیدرولیکی از مرتبه اول بوده و عملگرهای سروو از مرتبه دوم است. به همین منظور، در حالت کلی می‌توان عملگر را از مرتبه n انتخاب نمود. ایده استفاده شده برای عملگر مرتبه اول را می‌توان به مرتبه بالاتر تعمیم داد. سپس، با رویکرد پیشنهادی قانون هدایت را طراحی نمود.

قضیه ۲: در دستگاه مختصات دوعدی، مسئله هدایت توصیف شده با معادلات (۲۱) و (۲۲) را در نظر بگیرید. اگر قانون هدایت تناسبی به صورت زیر تغییر یابد:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{CB} \left(\frac{1}{\gamma_1} x + \dot{u}_{PN} - CA\eta - \left(\frac{v_c}{2r} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) (\xi - u_{PN}) \right), \\ u_{PN} = Nv_c x + w. \end{cases}$$

آن وقت، پایداری حلقه هدایت با وجود دینامیک مرتبه بالا برای عملگر تضمین خواهد شد. در قانون هدایت فوق، ثابت‌های $\gamma_1 > 0$ ، $\gamma_2 > 0$ و $N > 2$ می‌باشد.

اثبات: از آنجاکه درجه نسبی تابع تبدیل عملگر یک می‌باشد. در نتیجه $CB \neq 0$ خواهد بود. از این‌رو، می‌توان ξ را به صورت زیر نوشت:

$$\xi = CA\eta + CBu. \quad (25)$$

بدیهی است که شرط مینیمم فاز بودن تابع تبدیل $G(s)$ ، پایدار بودن دینامیک صفر را برآورده می‌نماید. بنابراین، اگر معادله دیفرانسیل (۲۵) پایدار شود آن وقت اثر دینامیک عملگر در سیستم حلقه بسته لحاظ خواهد شد.

برای تضمین پایدار مجانبی سیستم حلقه بسته، یک تابع لیاپانف به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$V(x, \xi) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\gamma_1}{2r}(\xi - u_{PN})^2, \quad \gamma_1 > 0. \quad (26)$$

از تابع لیاپانف (۲۶) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \xi) &= \frac{1}{r}x(2v_c x + w - u_{PN}) + \frac{1}{r}x(-\xi + u_{PN}) \\ &\quad + \frac{\gamma_1}{r}(\xi - u_{PN})(CA\eta + CBu - \dot{u}_{PN}) - \frac{\gamma_1 \dot{r}}{2r^2}(\xi - u_{PN})^2. \end{aligned} \quad (27)$$

۴- نتایج شبیه‌سازی

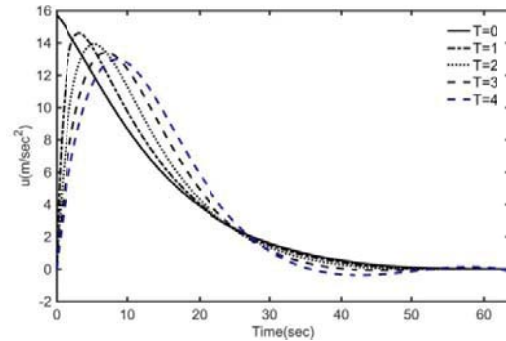
در این بخش، ابتدا در مثال ۱ برای نشان دادن لزوم و ضرورت اصلاح قانون هدایت تناسبی، شبیه‌سازی مسئله هدایت با وجود ثابت زمانی‌های مختلف در حلقه هدایت انجام خواهد شد. سپس، برای نشان دادن کارایی رویکرد ارائه شده، روش هدایت پیشنهادی در مثال ۲ شبیه‌سازی شده و با هدایت تناسبی مقایسه شده است.

مثال ۱- لزوم و ضرورت اصلاح قانون هدایت تناسبی

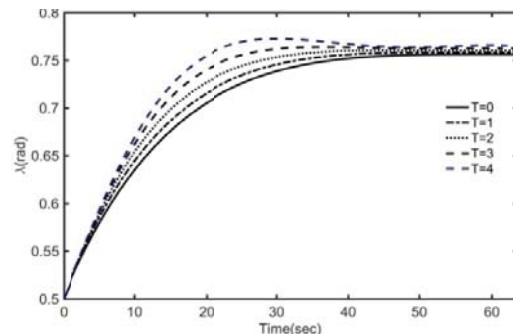
سیستم هدایت دویعدی توصیف شده با معادلات (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. سرعت جسم V_M ، سرعت هدف V_T ، زاویه اولیه جسم $\varphi_M(0)$ ، زاویه خط دید اولیه $\lambda(0)$ ثابت ناوبری N و زاویه هدف φ_T مطابق مقادیر جدول ۱ انتخاب می‌شود. با وجود دینامیک مرتبه اول با ثابت زمانی‌های صفر تا ۴ ثانیه، حلقه هدایت در نرم افزار Matlab شبیه‌سازی می‌شود. شکل موج‌های شتاب جانبی $u(t)$ ، فاصله نسبی $r(t)$ ، تغییرات زاویه خط دید $\lambda(t)$ و زاویه خط دید $\lambda(t)$ به ترتیب در شکل‌های ۳ تا ۶ نشان داده شده است. همچنین، فاصله از دست‌دهی به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی در جدول ۲ آورده شده است.

جدول (۱): مقادیر پارامترهای استفاده شده در شبیه‌سازی.

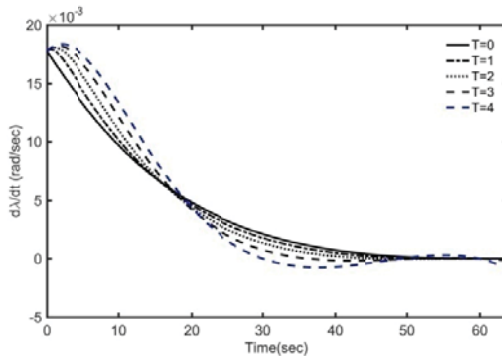
$R(0)$	N	φ_T	$\varphi_M(0)$	$\lambda(0)$	V_T	V_M
۱۰,۰۰۰	۵	۲	۰/۱	۰/۵	۱۰۰	۲۰۰



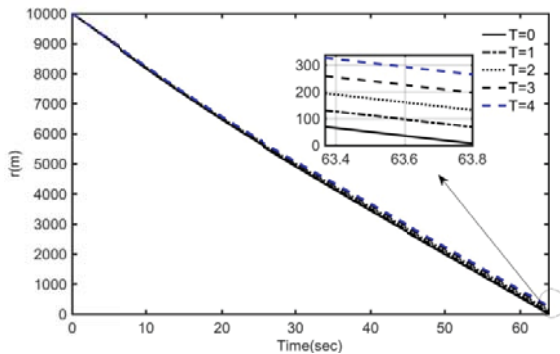
شکل (۳): شتاب جانبی اعمال شده به جسم.



شکل (۴): زاویه خط دید جسم با هدف.



شکل (۵): تغییرات زاویه خط دید.



شکل (۶): فاصله نسبی جسم از هدف.

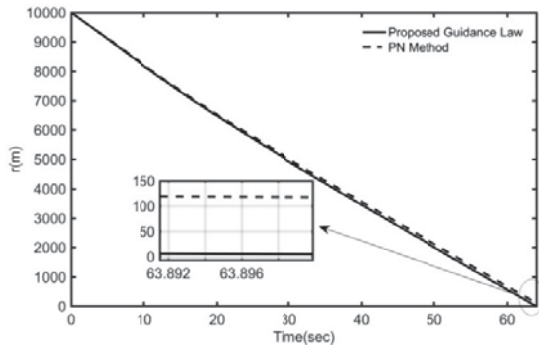
جدول (۲): مقایسه فاصله از دست‌دهی در مقادیر مختلف ثابت زمانی.

ثابت زمانی (ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴
فاصله از دست‌دهی (متر)	۷/۴۲۶	۶۹	۱۳۲/۳۸	۱۹۷/۷	۲۵۶/۲

با مشاهده نتایج شبیه‌سازی انجام شده در شکل‌های ۳ تا ۶ و جدول ۲ روشن است که هرچه مقدار ثابت زمانی حلقه هدایت بزرگتر شود، پایداری و شاخص عملکرد (پاسخ گذرای) سیستم حلقه بسته تغییرات قابل ملاحظه‌ای خواهد داشت. در شبیه‌سازی انجام شده در مثال ۱ ثابت زمانی عملگر افزایش داده شده است و با به‌کارگیری قانون هدایت تناسبی، اثر ثابت زمانی بر پاسخ گذرای سیستم هدایت بررسی می‌شود. قانون هدایت تناسبی برای حلقه هدایت بدون وجود دینامیک عملگر توسعه داده شده است. طبیعی است مشخصات پاسخ گذرای حلقه هدایت از قبیل زمان نشست، فراجهش و غیره تحت تأثیر دینامیک عملگر خواهد گرفت. در نتیجه خطای فاصله از دست‌دهی نیز بیشتر خواهد شد. از این‌رو، نیاز است که اثر دینامیکی عملگر در قانون هدایت لحاظ شده و روش هدایت تناسبی اصلاح شود.

مثال ۲- بررسی کارایی روش هدایت پیشنهادی

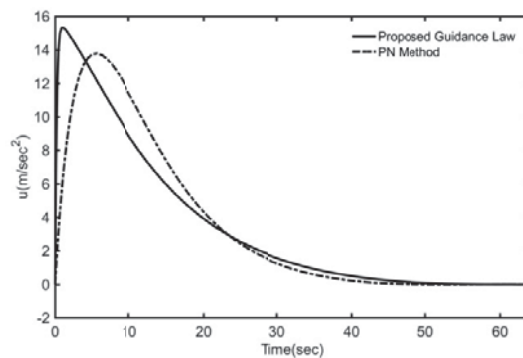
سیستم هدایت دوبعدی با مقادیر جدول ۱ را در نظر بگیرید. با استفاده از معادلات تعمیم یافته و استفاده از تابع تبدیل مرتبه اول برای عملگر، مسئله هدایت شبیه‌سازی می‌شود. مدت زمان پرواز جسم ۶۳ ثانیه و ثابت زمانی عملگر ۱ ثانیه انتخاب شده است. الگوریتم هدایت ارائه شده در قضیه ۱ با قانون هدایت تناسبی مقایسه شده است. شکل موج‌های شتاب جانبی $u(t)$ ، فاصله نسبی $r(t)$ تغییرات زاویه خط دید $\lambda(t)$ و زاویه خط دید $\lambda(t)$ به ترتیب در شکل‌های ۷ تا ۱۰ نشان داده شده است.



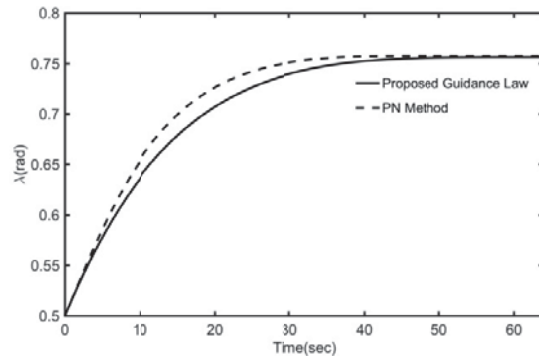
شکل (۱۰): فاصله نسبی جسم از هدف.

از نتایج شبیه‌سازی انجام شده، کارایی روش هدایت پیشنهادی در مقایسه با قانون هدایت تناسبی نشان داده شده است. بنابراین، در نتایج شبیه‌سازی مشاهده می‌شود که در شرایطی که عملگر دارای دینامیک قابل توجهی باشد نیاز است روش هدایت کلاسیک اصلاح شود تا سیستم هدایت عملکرد بهتری داشته باشد.

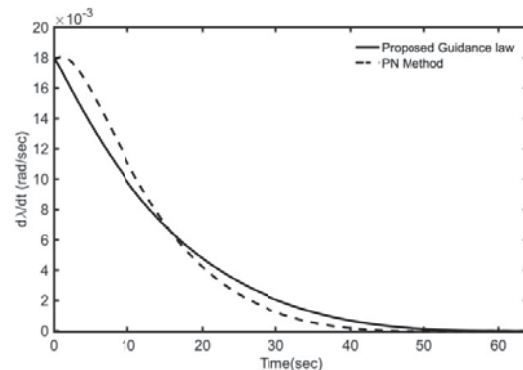
نسخه اولیه الگوریتم هدایت تناسبی برای حلقه هدایت بدون وجود دینامیک عملگر و یا سنسور ارائه شده است. طبیعی است با در نظر گرفتن دینامیک عملگر، پایداری حلقه هدایت به هم خواهد خورد. اگر به چنین حلقه‌ای یک قطب (ناشی از دینامیک عملگر یا سنسور) اضافه شود، به وضوح محدوده پایداری حلقه هدایت کاهش خواهد یافت. برای جلوگیری از کاهش پایداری حلقه هدایت، قانون هدایت جدیدی در این مقاله توسعه داده شد تا پایداری مجانبی حلقه هدایت در حضور دینامیک عملگر تضمین شود. در مثال ۱ دیده شد که پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته تحت تأثیر دینامیک عملگر قرار می‌گیرد. پس با افزایش ثابت زمانی عملگر، شاخص‌های پاسخ گذرا عموماً بدتر می‌شود. حال برای جبران اثر عملگر و اصلاح قانون هدایت تناسبی، قانون هدایت جدیدی استخراج شد که در حضور دینامیک عملگر بتواند پاسخ گذرای سیستم را بهبود دهد. در ضمن پایداری سیستم هدایت نیز با نظریه پایداری لیاپانف تضمین می‌شود. در یک سیستم دینامیکی (برای مثال سیستم مرتبه دوم) پایداری نسبی می‌تواند توسط ضریب میرایی آن سیستم بیان گردد. از این رو، پایداری نسبی یک سیستم دینامیکی با مشخصات پاسخ گذرا از قبیل زمان نشست و فراجهش ارتباط نزدیکی خواهد داشت. در بخش شبیه‌سازی، فقط مشخصات پاسخ گذرا با استفاده از دو الگوریتم هدایت مقایسه شده است. اگر چه پایداری حلقه هدایت به صورت تحلیلی و ریاضی در بخش سوم اثبات شد.



شکل (۷): شتاب جانبی اعمال شده به جسم.



شکل (۸): زاویه خط دید جسم با هدف.



شکل (۹): تغییرات زاویه خط دید.

- [7] Behnamgol, V., Vali, A., and Mohammadi, A., "A New Back-stepping Sliding Mode Guidance Law Considering Control Loop Dynamics", *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 89, No. 4, pp. 9-16, 2016.
- [8] Gutman, S., "On Optimal Guidance for Homing Missiles", *Journal of Guidance and Control*, Vol. 2, No. 4, pp. 296-300, 1979.
- [9] Yang, C.-D. and Chen, H.-Y., "Non-linear H Robust Guidance Law for Homing Missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, pp. 882-890, 1998.
- [10] Zhou, D., Sun, S., and Teo, K.L., "Guidance Laws with Finite Time Convergence", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 6, pp. 1838-1846, 2009.
- [11] Behnam Gol, V., Zaman, I.M., Vali, A.R., and Ghahramani, N.A., "Guidance Law Design, Using Finite Time Second Order Sliding Mode Control", *Journal of Control*, Vol. 5, No. 3, pp. 36-44, 2011.
- [12] Dimirovski, G.M., Deskovski, S.M., and Gacovski, Z.M., "Classical and Fuzzy-system Guidance Laws in Homing Missiles Systems", *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, Vol. 5, pp. 3032-3047, 2004.
- [13] Lin, C.-M. and Hsu, C.-F. "Guidance Law Design by Adaptive Fuzzy Sliding-mode Control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 2, pp. 248-256, 2002.
- [14] Breivik, M., and Fossen, T.I. "Principles of Guidance-based Path Following in 2D and 3D", *The 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, 2005.
- [15] Palumbo, N.F., Blauwkamp, R.A., and Lloyd, J.M., "Basic Principles of Homing Guidance", *Johns Hopkins APL Technical Digest*, Vol. 29, No. 1, pp. 25-41, 2010.
- [16] Ghaffari, V., "Guidance Algorithm Selection Based on Line-of-sight Angleinguidance Systems", *High Speed Craft*, Vol. 16, No. 61, pp.50-57, 2018.
- [17] Cho, N. and Kim, Y., "Modified Pure Proportional Navigation Guidance Law for Impact Time Control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No. 4, pp. 852-872, 2016.
- [18] Jeon, In-Soo, and Jin-Ik Lee. "Impact-time-control Guidance Law with Constraints on Seeker Look Angle", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 53, No. 5, pp. 2621-2627, 2017.
- [19] Song, J., Song, S., and Xu, S., "Three-dimensional Cooperative Guidance Law for Multiple Missiles with Finite-time Convergence", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 67, 193-205, 2017.
- [20] Song, J., and Song, S., "Three-dimensional Guidance Law Based on Adaptive Integral Sliding Mode Control", *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 29, No. 1, pp. 202-214, 2016.

۵- نتیجه گیری

معمولاً زمانی که خاصیت لختی (دینامیک به خاطر وجود عملگر) در یک حلقه هدایت مشاهده شود، امکان از دست رفتن کارآمدی روش هدایت تناسبی وجود دارد. از این رو، برای جبران اثر آن دینامیک در سیستم حلقه بسته بایستی قانون هدایت تناسبی به نحو مناسبی بازطراحی و تغییر داده شود. بنابراین در این مقاله، یک مدل ریاضی برای عملگر در نظر گرفته شد و با ایده گام به عقب و بکارگیری روش تحلیل پایداری لیاپانف، قانون هدایت تناسبی تصحیح شد. با مشاهده نتایج شبیه سازی به وضوح دیده می شود که رویکرد پیشنهادی، مشخصات پاسخ گذرای سریع تر و فاصله از دست دهی کمتری نسبت به روش هدایت تناسبی خواهد داشت. این موضوع بیانگر آن است با حفظ پایداری سیستم هدایت، عملکرد آن نیز بهبود یافته است. بنابراین در شرایط وجود دینامیک عملگر، الگوریتم هدایت پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به قانون هدایت تناسبی خواهد داشت. در این مطالعه، پایداری مجانبی حلقه بسته به صورت تحلیلی اثبات شده است. همچنین، بهبود عملکرد حلقه هدایت در شبیه سازی های عددی نشان داده شده است. بنابراین، نتایج شبیه سازی انجام شده می تواند معیار قابل قبولی برای مقایسه عملکرد سیستم هدایت باشد.

۶- مراجع

- [1] Zarchan, P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, USA, 2012.
- [2] Siouris, G.M. *Missile Guidance and Control Systems*, Springer Science & Business Media, Berlin, Germany, 2004.
- [3] Yanushevsky, R. and Boord, W., "Lyapunov Approach to Guidance Laws Design", *Non-linear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 63, No's. 5-7, pp. 743-749, 2005.
- [4] Saleem, A. and Ratnoo. A., "Lyapunov-based Guidance Law for Impact Ttime Control and Simultaneous Arrival", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No. 1, pp. 164-173, 2016.
- [5] Shima, T., Idan, M., and Golan, O.M., "Sliding-mode Control for Integrated Missile Autopilot Guidance", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, pp. 250-260, 2006.
- [6] Moosapour, S.H., Bagherzadeh, M., Alizadeh, G., and Ghaemi, S., "Back-stepping Guidance Law Design for Missile Against Maneuvering Targets", *International Conference on Control, Instrumentation and Automation*, Shiraz, Iran, 2011.

