

# مدل سازی و شبیه سازی مسیر یک حامل بالستیک در دستگاه های مختصات زمین چرخان و ناوبری

هدف از ارائه این مقاله، بیان روند مناسب برای مدل سازی و شبیه سازی مسیر حرکت یک حامل بالستیک به صورت ساختارمند و معرفی ابزارهای ریاضی لازم برای این کار است. وسیله مورد نظر یک حامل سه مرحله ای است که در هر مرحله دارای شرایط جرمی، آیرودینامیکی، پیشرانشی و کنترلی مجزا است. برای مدل سازی دستگاه های مورد نیاز از جمله دستگاه اینرسی، دستگاه زمین، دستگاه ناوبری و دستگاه بدنی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، معادلات پروازی این وسیله نسبت به چارچوب زمین و چارچوب ناوبری برای مدل سازی مدنظر قرار گرفته و ماتریس های تبدیل میان دستگاه های مختلف ارائه شده است. در مدل مورد نظر زمین به صورت یک بیضی گون به همراه مدل مشخصی از میدان جاذبه زمین و مطابق با مدل WGS-84 مورد استفاده قرار گرفته است. برای جلوگیری از تکینگی در معادلات حرکت دورانی از کوانترنیون ها به جای زوایای اویلر به عنوان متغیرهای حالت استفاده و تبدیلات میان آنها نیز معرفی شده است. در نهایت پس از شبیه سازی نتایج به صورت گرافیکی ارائه و بررسی شده است..

**واژه های کلیدی:** حامل بالستیک، مدل سازی دینامیکی، چارچوب زمین، دستگاه ناوبری، ماتریس تبدیل

محمد صابری توکلی\*؛ کارشناس ارشد  
هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم،  
تحقیقات و فناوری

\*نویسنده مخاطب، آدرس تهران، کد پستی:  
۱۴۶۵۷۷۴۱۱۱

m.saberi@ari.ac.ir

## Modeling and Simulation of a Ballistic Launch Vehicle in ECEF and Navigation Coordinate Systems

The purpose in this paper is to express a suitable process of modeling and simulation of a ballistic launch vehicle and introducing necessary mathematical solutions for the process. This vehicle is a three – stage ballistic launch vehicle such that each stage has independent condition and characteristic such as mass characteristic, aerodynamic characteristic, propulsion characteristic and control characteristic. The suitable coordinate systems are introduced and analyzed for modeling, such as inertial coordinate system, earth coordinate system, navigation coordinate system and body coordinate system. The equation of motion of this ballistic launch vehicle with respect to earth frame and navigation frame are considered and transformation matrices are mentioned to express definition of vectors in coordinate systems. In this procedure the earth is modeled as an ellipsoid surface with a gravitational field model according to World Geodetic System 1984. Avoiding singularity, quaternions are considered as rotational states instead of Euler angles. Finally, the results of simulation are presented and analyzed graphically.

**Keywords:** Launch Vehicle, Dynamic Modeling, Earth Frame, Navigation Coordinate System, Transformation Matrix

M. Saberi Tavakkoli\*, MSc.  
Aerospace Research Institute,  
Ministry of Science, Research  
and Technology

\*Corresponding Author, Postal  
Code: 1465774111, Tehran, IRAN  
m.saberi@ari.ac.ir

## مقدمه

مدلسازی و شبیه‌سازی یکی از مهمترین مراحل در فرایند طراحی وسایل هوافضایی است. از این‌رو، داشتن یک روند مشخص برای این امر بسیار ضروری به‌نظر می‌رسد. یکی از وسایلی که همواره مدنظر، حامل‌های بالستیک می‌باشد که کاربردهای متنوعی از جمله کاربردهای نظامی و غیرنظامی دارد. در یک مدلسازی خوب دانستن شرایط و محیط پروازی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. همچنین، استفاده از ابزار مناسب برای این کار به تسهیل و تسریع روند مدلسازی کمک می‌کند. از طرفی، پرداختن به تمام جزئیات مدلسازی نیز می‌تواند کار را پیچیده کند و حجم محاسبات را بالا ببرد. از این‌رو، شایسته است که متناسب با هدف مدلسازی و شبیه‌سازی، فرضیات ساده‌کننده‌ای به‌کار گرفته شود، به‌طوری‌که این فرضیات منجر به تغییر ماهیت و کیفیت در نتیجه نهایی نشود. بر پایه همین نگرش نسبت به اهداف کار می‌توان بهترین مسیر و ابزار را برای مدلسازی به‌کار برد. مراجع مختلفی برای معرفی روند مدلسازی و معرفی ابزارهای آن وجود دارند که از جمله آن می‌توان به مراجع [۱، ۲] اشاره کرد. همچنین، امروزه مأموریت‌هایی انجام شده توسط وسایل هوافضایی، بدون در نظر گرفتن ناوبری امری تقریباً ناممکن است. از این‌رو، ناوبری این وسایل سهم به‌سزایی در به ثمر رسیدن این مأموریت‌ها دارد. امر ناوبری به‌ویژه برای حامل‌های دور برد بسیار حیاتی است تا آنجا که اختلال در سیستم ناوبری منجر به ازدست‌رفتن مأموریت می‌شود. بنابراین، به‌دست‌آوردن مسیر حامل در این زمینه بسیار مهم است.

با توجه به مطالبی که بیان شد، این تمایل که مسیر بالستیک یک حامل از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن دوباره به سطح زمین بررسی و شبیه‌سازی شود، وجود دارد. برای بررسی این موضوع استفاده از یک مدل جاذبه و یک مدل زمین مهم می‌باشد. به‌طوری‌که هر چه این مدل‌ها دقیق‌تر باشند، مسیر به‌دست‌آمده از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود. بدین منظور در این مقاله از مدل جاذبه<sup>۱</sup> WGS-84 و الگوی زمین بیضی‌گون دوار استفاده می‌شود.

## تعریف مسئله

وسيلة مدنظر برای این مقاله، یک حامل بالستیک است که مدلسازی آن باید از لحظه پرتاب تا لحظه دوباره به زمین رسیدن انجام شود. فرض می‌شود که وسیله از ارتفاع سطح دریا

و کاملاً عمود بر سطح زمین پرتاب می‌شود. نقطه شروع پرتاب به شرح جدول (۱) است.

جدول ۱- شرایط اولیه

پارامترهای اولیه	مقادیر اولیه
طول جغرافیایی	۴۰ (درجه)
عرض جغرافیایی	۳۰ (درجه)
ارتفاع جغرافیایی	۰ (درجه)
زاویه سمت	-۱۱۰ (درجه)
زاویه فراز	۹۰ (درجه)
زاویه غلت	۰ (درجه)

برای هدایت این پرتابه از فرامین پیش‌تنظیم<sup>۲</sup> استفاده شده است. این فرامین بر روی نرخ دوران‌های بدنه وسیله اعمال خواهد شد. فرامین هدایت باید به‌صورت زیر اعمال شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_c = 0 \\ q_c = \begin{cases} 0 & t < 5 \text{ (sec)} \\ -1.2 \text{ (deg/sec)} & 5 \text{ (sec)} < t < 14 \text{ (sec)} \\ \left(\frac{t-50}{30}\right) \text{ (deg/sec)} & 14 \text{ (sec)} < t < 50 \text{ (sec)} \\ 0 & t > 50 \text{ (sec)} \end{cases} \\ r_c = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

حامل مورد نظر سه مرحله‌ای بوده که در هر مرحله دارای مشخصات سیستمی متفاوتی است (جدول ۲).

## مدلسازی

در این بخش تمامی نیازهایی که برای مدلسازی مسئله مورد نظر وجود دارد بیان و ابزارهای لازم معرفی می‌شود. برای مدلسازی نیازمند تعریف برخی چارچوب‌ها هستیم. چارچوب‌هایی که برای این مسئله مورد نیاز است عبارتند از: چارچوب اینرسی، چارچوب زمین چرخان، چارچوب ناوبری و چارچوب بدنی. چارچوب اینرسی چارچوبی است که هم مرکز با زمین است، با زمین حرکت می‌کند اما با آن نمی‌چرخد. چارچوب زمین نیز چارچوبی است هم مرکز با زمین که با آن می‌چرخد. چارچوب اینرسی و چارچوب زمین مناسب برای مسیرهای طولانی مانند مسیر حرکت ماهواره‌ها هستند. چارچوب ناوبری نیز چارچوبی است که مرکز آن بر روی سایه وسیله بر روی زمین قرار دارد که محورهای راستگرد آن به‌ترتیب در راستای شمال جغرافیایی، شرق جغرافیایی و به سمت مرکز زمین است. چارچوب دیگر چارچوب بدنی است که برای تعریف نیروها، شتاب‌ها و سرعت‌ها مناسب است. بنابراین، با توجه به چارچوب‌های معرفی‌شده می‌توان مدلسازی را انجام داد.

جدول ۲- مشخصات سیستمی حامل

مرحله	زمان (ثانیه)		تغییرات جرمی (کیلوگرم)	نیروی پیشران (نیوتن)	ضرایب آیرودینامیکی	سطح مقطع مرجع (متر مربع)
	از	تا				
اول	۰	۵۰	۱۷۱۶۲-۱۷۲.t	$3/5854 \times 10^5$	$C_{x0} = -0/3404$ $C_{z0} = -0/437$ $C_{xa} = -0/198$ $C_{za} = -0/2326$	۲
دوم	۵۰	۱۰۰	۱۰۴۲۱-۸۵.t	$1/8903 \times 10^5$	$C_{x0} = -0/2044$ $C_{z0} = -0/264$ $C_{xa} = -0/0741$ $C_{za} = -3/4409$	۲
سوم	۱۰۰	-	۵۰۰	.	$C_{x0} = -0/0948$ $C_{z0} = -0/0538$ $C_{xa} = -0/0587$ $C_{za} = -0/9597$	۲

توجه: ضرایب آیرودینامیکی همگی در دستگاه بدنی هستند و سطح مقطع مرجع ۲ متر مربع است.

## مدل‌سازی

در این بخش تمامی نیازهایی که برای مدل‌سازی مسئله مورد نظر وجود دارد بیان و ابزارهای لازم معرفی می‌شود. برای مدل‌سازی نیازمند تعریف برخی چارچوب‌ها هستیم. چارچوب‌هایی که برای این مسئله مورد نیاز است عبارتند از: چارچوب اینرسی، چارچوب زمین چرخان، چارچوب ناوبری و چارچوب بدنی. چارچوب اینرسی چارچوبی است که هم مرکز با زمین است، با زمین حرکت می‌کند اما با آن نمی‌چرخد. چارچوب زمین نیز چارچوبی است هم مرکز با زمین که با آن می‌چرخد. چارچوب اینرسی و چارچوب زمین مناسب برای مسیرهای طولانی مانند مسیر حرکت ماهواره‌ها هستند. چارچوب ناوبری نیز چارچوبی است که مرکز آن بر روی سایه وسیله بر روی زمین قرار دارد که محورهای راستگرد آن به ترتیب در راستای شمال جغرافیایی، شرق جغرافیایی و به سمت مرکز زمین است. چارچوب دیگر چارچوب بدنی است که برای تعریف نیروها، شتاب‌ها و سرعت‌ها مناسب است. بنابراین، با توجه به چارچوب‌های معرفی شده می‌توان مدل‌سازی را انجام داد.

## مدل‌سازی دینامیکی

برای مدل‌سازی ابتدا باید چارچوب مناسبی در نظر گرفته شود. مدل‌سازی در هر چارچوبی که باشد نتایج آن می‌تواند به چارچوب‌های دیگر انتقال یابد. چارچوب موردنظر برای استخراج روابط چارچوب زمین است که مرکز آن بر مرکز زمین منطبق و با زمین در حال گردش است. این دستگاه که با نماد  $ECEF^3$  بیان می‌شود، مناسب برای استخراج معادلات ناوبری است. چارچوب دیگری که مورد توجه است چارچوب بدنی  $^4$  است که

مناسب برای تعریف نیروهای وارد بر وسیله می‌باشد. بدین منظور نیروهای وارد بر موشک در دستگاه بدنی تعریف می‌شوند که از طریق ماتریس تبدیل، به دستگاه ECEF انتقال داده می‌شود. مدل جذبی نیز از ابتدا در دستگاه ECEF بیان می‌شود. بنابراین، معادله ناوبری در چارچوب ECEF به صورت رابطه (۲) خواهد بود [۲].

$$\vec{v}_e^e = C_b^e \vec{f}^b + \vec{g}_l^e - 2\vec{\omega}_{ie}^e \times \vec{v}_e^e, \quad (2)$$

که در رابطه بالا  $\vec{v}_e^e$  سرعت وسیله نسبت به چارچوب ECEF تعریف شده در دستگاه ECEF،  $\vec{f}^b$  نیروهای ویژه غیرجاذبی وارد بر وسیله تعریف شده در دستگاه بدنی و  $\vec{\omega}_{ie}^e$  سرعت زاویه‌ای زمین نسبت به چارچوب اینرسی تعریف شده در دستگاه ECEF است.  $\vec{g}_l^e$  نیز شتاب‌های جاذبی مؤثر است که به صورت رابطه (۳) محاسبه می‌شود [۲].

$$\vec{g}_l^e = \vec{G}^e - \vec{\omega}_{ie}^e \times \vec{\omega}_{ie}^e \times \vec{r}_e^e, \quad (3)$$

که بردار  $\vec{\omega}_{ie}^e$  با توجه به سرعت دورانی زمین به دور خودش به صورت  $\vec{\omega}_{ie}^e = [00\Omega]^T$  می‌باشد.

برای انتشار ماتریس تبدیل نیز می‌توان از روش کسینوس‌های هادی  $^{5}$  (DCM) استفاده کرد. زیرا در این روش مشکل تکنیکی وجود ندارد. فقط این روش کمی زمان‌بر خواهد بود که به دلیل off-line بودن کار قابل پذیرش است. معادله انتشار در این روش به صورت رابطه (۴) است [۲].

$$\dot{C}_b^e = C_b^e \left[ \vec{\omega}_{eb}^b \times \right]. \quad (4)$$

3. Earth-Centered, Earth-Fixed  
4. Body Frame

5. Direction Cosine Matrix

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (10)$$

همچنین، ماتریس‌های تبدیل دستگاه زمین به دستگاه ناوبری، دستگاه زمین به دستگاه اینرسی و دستگاه بدنی به دستگاه باد به ترتیب به صورت روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) است.

$$C_e^n = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos L & -\sin \lambda \sin L & \cos \lambda \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ -\cos \lambda \cos L & -\cos \lambda \sin L & -\sin \lambda \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$C_e^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_{GR} & \sin \theta_{GR} & 0 \\ -\sin \theta_{GR} & \cos \theta_{GR} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$C_b^w = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (13)$$

در رابطه (۱۲)  $\theta_{GR}$  میزان زاویه انحراف نصف‌النهار مبدأ (گرینویچ) از راستای اعتدال بهاری است.

به دلیل اینکه قرار است برخی از پارامترها و المان‌ها در قاب ناوبری بیان شوند، برخی از روابط در این قاب بیان می‌شوند و سپس با استفاده از ماتریس‌های تبدیل به دستگاه‌های دیگر انتقال داده می‌شوند. این روابط محاسبه نرخ تغییرات عرض و طول جغرافیایی هستند که به صورت روابط (۱۴) بیان می‌شوند [۲].

$$\begin{cases} \dot{L} = \frac{V_N}{r_L + h} \\ \dot{\lambda} = \frac{V_E}{(r_\lambda + h) \cos L} \end{cases} \quad (14)$$

به طوری که:

$$\begin{cases} r_L = r_0 (1 - 2f \cos 2L) \\ r_\lambda = r_0 (1 + 2f \sin^2 L) \end{cases} \quad (15)$$

که در آن:

$$\begin{cases} r_0 = R_E (1 - 2f \sin^2 L_C) \\ \tan L_C = \tan L (1 - f)^2 \end{cases} \quad (16)$$

### انتشار ماتریس تبدیل

فرض کنید  $C$  یک ماتریس تبدیل بین دو دستگاه مختصات باشد. با توجه به روابط انتشار از طریق کسینوس‌های هادی که در مرجع [۲] آمده است، رابطه زیر وجود دارد:

$$\dot{C} = C\Omega \quad (17)$$

در رابطه ناوبری (رابطه (۲)) که در بالا به آن اشاره شد منظور از  $\vec{f}^b$  شتاب‌های غیرجاذبی است که به صورت رابطه (۵) محاسبه خواهد شد:

$$f^b = \frac{\sum F^b}{m(t)}, \quad (5)$$

که  $\sum F^b$  شامل نیروی پیشران و نیروهای آیرودینامیکی است و  $m(t)$  نیز جرم می‌باشد که در حال تغییر است.

### نیروهای آیرودینامیکی

حامل بالستیک در حین پرواز نیروهای آیرودینامیکی را تجربه خواهد کرد که بستگی به شکل هندسی و سطح مقطع آن دارد. در اینجا فرض بر این است که حامل مورد نظر یک وسیله با تقارن محوری است و نیروهای آیرودینامیکی به صورت روابط (۶) را تجربه خواهد کرد.

$$D_x = (C_{x0} + C_{x\alpha}) \bar{q} s \quad (6)$$

$$D_z = (C_{z0} + C_{z\alpha}) \bar{q} s$$

که در آن  $C_{x0}$ ،  $C_{x\alpha}$ ،  $C_{z0}$  و  $C_{z\alpha}$  ضرایب آیرودینامیکی مطابق با جدول ۲،  $S$  سطح مقطع،  $\bar{q}$  فشار دینامیکی و  $\alpha$  زاویه حمله است. زاویه حمله بر حسب مؤلفه‌های سرعت در دستگاه بدنی به صورت رابطه (۷) به دست می‌آید.

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_z^b}{v_x^b}. \quad (7)$$

فشار دینامیکی نیز از طریق رابطه (۸) به دست می‌آید.

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (8)$$

که در آن  $\rho$  تابعی از ارتفاع است که بر اساس اتمسفر استاندارد (ISA) تغییر خواهد کرد [۳].

### ماتریس‌های تبدیل

با توجه به تعاریف مختلف بردارها در دستگاه‌های مختلف نیاز به یک سری ماتریس تبدیل بین این دستگاه‌ها می‌باشد که با توجه به مرجع [۴] می‌توان به صورت روابط (۹) تا (۱۳) آنها را در اختیار داشت.

ماتریس تبدیل دستگاه ناوبری به دستگاه بدنی به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود.

$$C_n^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

که در رابطه بالا  $\varphi$ ،  $\theta$  و  $\psi$  زوایای اوپلر هستند. با ضرب سه ماتریس رابطه (۹) فرم آن به صورت رابطه (۱۰) خواهد شد.

که در روابط (۲۱) شعاع زمین در استوا،  $R_E$  شعاع زمین در قطب،  $\omega_e$  سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خود،  $f$  ضریب پخیدگی<sup>۸</sup> زمین و  $e$  خروج از مرکزیت زمین است. با توجه به پارامترهای معرفی شده بردار جابه‌جایی در دستگاه مختصات ECEF به صورت رابطه (۲۲) خواهد بود.

$$\vec{r}_{ECEF} = [x \ y \ z]^T, \quad (22)$$

که هر یک از مؤلفه‌های آن به صورت روابط (۲۳) خواهد بود.

$$\begin{cases} x = (r_1 + h) \cos L \cos \lambda \\ y = (r_1 + h) \cos L \sin \lambda \\ z = [r_1(1 - e^2) + h] \sin L \end{cases} \quad (23)$$

که در روابط بالا  $h$  ارتفاع جغرافیایی<sup>۹</sup>،  $L$  طول جغرافیایی و  $\lambda$  عرض جغرافیایی است و  $r_1$  از رابطه (۲۴) به دست می‌آید.

$$r_1 = \frac{R_E}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{1/2}}. \quad (24)$$

متداول‌ترین الگوی کاربردی برای جاذبه زمین براساس هارمونیک‌های منطقه‌ای<sup>۱۰</sup> با فرض تقارن محوری میدان جاذبه به صورت رابطه (۲۵) ارائه شده است [۴، ۵].

$$\vec{G} = -\vec{\nabla} \dot{\phi} = \left[ -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} \quad -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial y} \quad -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} \right]^T, \quad (25)$$

که در آن  $\dot{\phi}$  پتانسیل جاذبه و تابعی از موقعیت مکانی  $\vec{r}_{ECEF}$  است و خود از رابطه (۲۶) به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_E}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right\} \\ GM = \mu = 3.986 \times 10^5 \left( \frac{Km^3}{s^2} \right) \end{cases} \quad (26)$$

در رابطه بالا  $P_n(\sin \varphi)$  تابع لژاندر از مرتبه  $n$  و  $J_n$  هارمونیک‌های منطقه‌ای هستند.

با در نظر گرفتن اثر بزرگترین ضریب هارمونیک یعنی  $J_2$  می‌توان نشان داد که  $\vec{G}$  بر اساس مختصات نقاط در ECEF یا ECI<sup>۱۱</sup> به صورت رابطه (۲۷) قابل محاسبه است [۴، ۵].

سپس با توجه به رابطه (۱۷) می‌توان به صورت زیر فرآیند گسسته‌سازی را انجام داد:

$$\dot{C} = \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta t} \Rightarrow C_{i+1} = \dot{C}_i \Delta t + C_i \Rightarrow C_{i+1} = C_i \Omega \Delta t + C_i \quad (18)$$

حال روند بیان شده برای  $C_b^n$  و  $C_n^e$  به طور جداگانه مطابق روابط (۱۹) و (۲۰) انجام می‌شود و سپس از ضرب کردن این دو در همدیگر  $C_b^e$  به دست خواهد آمد.

$$\begin{cases} C_{b(i+1)}^n = C_{b(i)}^n \Omega_{nb}^b \Delta t + C_{b(i)}^n \\ \Omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -r_c & q_c \\ r_c & 0 & -p_c \\ -q_c & p_c & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} C_{n(i+1)}^e = C_{n(i)}^e \Omega_{en}^n \Delta t + C_{n(i)}^e \\ \Omega_{en}^n = \begin{bmatrix} 0 & -(-\dot{\lambda} \cos L) & -\dot{L} \\ -\dot{\lambda} \cos L & 0 & -\dot{\lambda} \cos L \\ -(-\dot{L}) & \dot{\lambda} \cos L & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (20)$$

که در روابط (۱۹) بالا  $q_c, p_c, r_c$  فرامین هدایتی از قبل تعیین شده هستند و به صورت رابطه (۱) با زمان تغییر می‌کنند.

### مدل جاذبه WGS-84 برای زمین بیضوی دوار

در حالت کلی زمین دارای شکل نامنظم است و نمی‌توان به وسیله یک معادله ریاضی شکل آن را توصیف نمود. در ناوبری نیاز به مدل‌سازی زمین توسط یکی از اشکال هندسی و بیان شتاب جاذبه زمین توسط یک فرمول ریاضی می‌باشیم. نزدیک‌ترین شکل هندسی به زمین یک بیضی گون است و این بیضی گون توسط پارامترهای مختلفی بیان می‌شود. مؤسسات تحقیقاتی مختلفی در ارتباط با پارامترهای زمین و بیان شکل هندسی آن فعالیت می‌کنند. WGS-84 یکی از آنها می‌باشد که سطح دریاهای آزاد (M.S.L<sup>v</sup>) را منطبق با این بیضی گون در نظر می‌گیرد و پارامترهای زمین را به صورت زیر بیان می‌کند [۲، ۵].

$$\begin{cases} R_E = 6378.137 (Km) \\ R_p = 6356.752 (Km) \\ \omega_e = \Omega = 7.292115 \times 10^{-5} (RPS) = 15.041067 (\text{°}/HR) \\ f = \frac{1}{298.257} \\ e = [f(2-f)]^{1/2} = 0.081819 \end{cases} \quad (21)$$

8. Flattening

۹. ارتفاع از سطح ژئودتیک زمین

10. Zonal Harmonic

11. Earth-Centered Inertial

7. Mean Sea Level

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

همچنین، خود زوایای اویلر نیز می‌توانند از طریق روابط (۳۱) انتشار یابند [۱].

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = p + (q \sin \varphi + r \cos \varphi) \tan \theta \\ \dot{\theta} = q \cos \varphi - r \sin \varphi \\ \dot{\psi} = (q \sin \varphi + r \cos \varphi) \sec \theta \end{cases} \quad (31)$$

### نتایج شبیه‌سازی

با توجه به روابطی که بیان شد، شبیه‌سازی در محیط نرم‌افزار متلب انجام شده است که نتایج آن به شرح زیر بیان می‌شود.

#### موقعیت

همان‌طور که در رابطه (۱) مشاهده شد، فرمان‌های داده‌شده به وسیله در جهت تغییر زاویه پیچ<sup>۱۲</sup> می‌باشد که منجر به تغییرات درایه‌های کوآرنیونی به صورت شکل (۱) شده است. همان‌گونه که از شکل (۱) مشخص است،  $q_0$  و  $q_2$  دارای مقدار متغیر و مقادیر  $q_1$  و  $q_3$  دارای مقدار ثابت صفر می‌باشند که بیانگر چرخش موشک حول محور  $Y$  بدنی خود است. ضمناً تغییرات آنها بین ثانیه ۵ تا ثانیه ۵۰ می‌باشد. یعنی با آنچه که از قانون کنترلی صادر می‌شود مطابقت دارد. این تغییرات در درایه‌های کوآرنیون معادل با تغییراتی در زوایای اویلر هستند که این تغییرات مطابق شکل (۲) خواهد بود. از شکل (۲) نیز همان نتیجه‌ای که از کوآرنیون‌ها اتخاذ شد، حاصل می‌شود. با توجه به شکل (۲)، تغییرات زوایای اویلر بین ثانیه ۵ تا ثانیه ۵۰ و آن هم فقط در زاویه پیچ اتفاق می‌افتد، که قابل قبول است.

در این قسمت مؤلفه‌های سرعت را در دستگاه‌های مختلف رسم شده است. در تمامی این نمودارها شکستگی‌هایی که در اثر تغییر مرحله به وجود می‌آید به خوبی مشهود است. شایان ذکر است که تمامی سرعت‌ها بر حسب متر بر ثانیه است.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \frac{-\mu}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \left[ 1 - 5 \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right] \right\} \frac{x}{r} \\ \frac{-\mu}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \left[ 1 - 5 \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right] \right\} \frac{y}{r} \\ \frac{-\mu}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \left[ 3 - 5 \left( \frac{z}{r} \right)^2 \right] \right\} \frac{z}{r} \end{bmatrix} \quad (27)$$

که در آن  $J_2 = 1.0823 \times 10^{-3}$  است.

#### تبدیلات میان زوایای اویلر و کوآرنیون‌ها

استفاده از زوایای اویلر در برخی شرایط ممکن است منجر به تکینگی محاسبات شود. این شرایط زمانی رخ می‌دهد که وسیله به زوایای نزدیک ۹۰ درجه در پیچ برسد. از این‌رو، برای اجتناب از بروز تکینگی از معادلات کوآرنیون استفاده می‌شود. اما استفاده از کوآرنیون‌ها موجب از بین رفتن دید فیزیکی نسبت به مسئله خواهد شد. بنابراین، تبدیلاتی وجود دارند که زوایای اویلر را به کوآرنیون و از کوآرنیون به زوایای اویلر تبدیل می‌کنند.

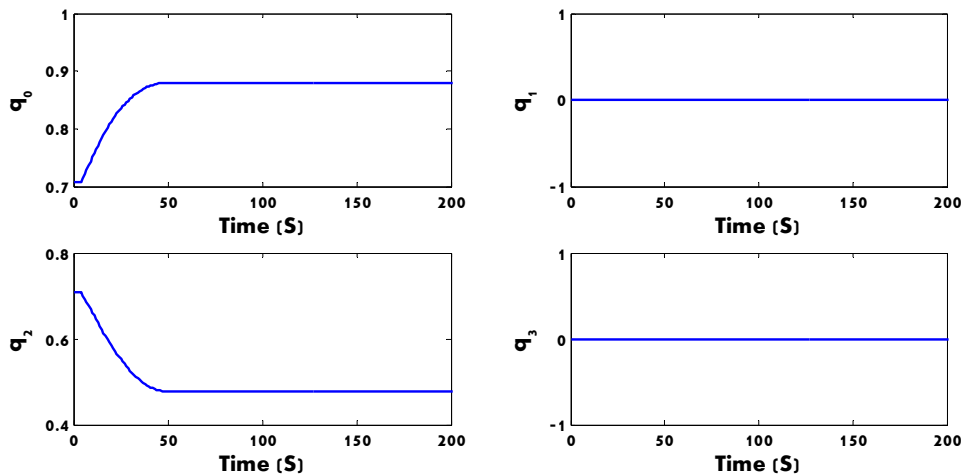
از آنجا که زوایای اویلر اولیه به‌عنوان شرایط نشان‌رویی اولیه داده شده است، می‌توان جهت پیدا کردن کوآرنیون‌ها و بردار دوران از زوایای اویلر استفاده کرد. بدین منظور از روابط (۲۸) استفاده می‌شود [۱].

$$\begin{cases} q_0 = \cos(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\varphi/2) + \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\varphi/2) \\ q_1 = \cos(\psi/2) \cos(\theta/2) \sin(\varphi/2) - \sin(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\varphi/2) \\ q_2 = \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \cos(\varphi/2) + \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \sin(\varphi/2) \\ q_3 = \sin(\psi/2) \cos(\theta/2) \cos(\varphi/2) - \cos(\psi/2) \sin(\theta/2) \sin(\varphi/2) \end{cases} \quad (28)$$

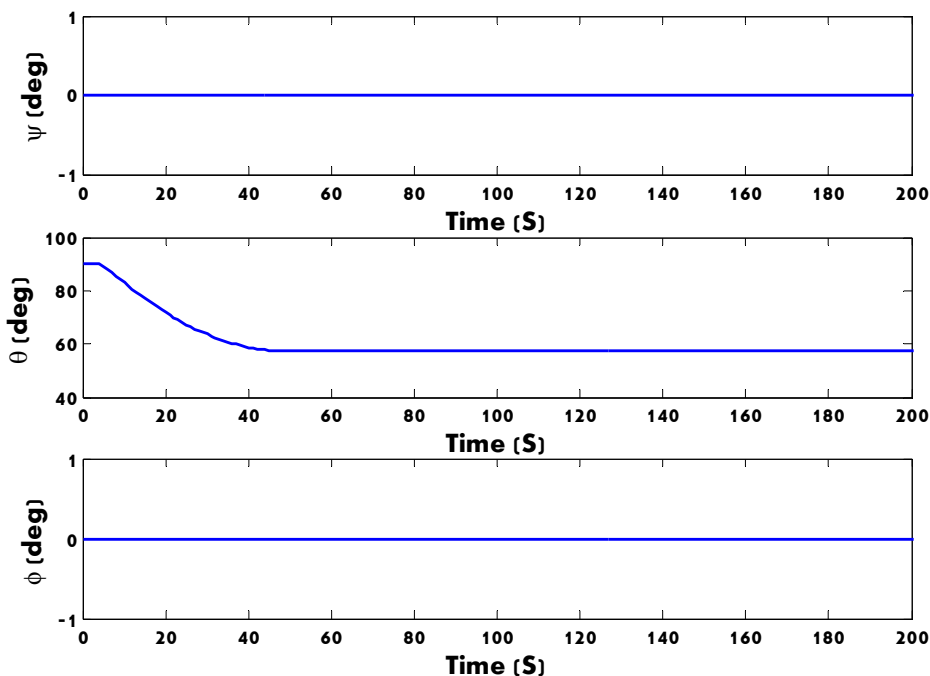
که در آن  $q_i$  ها مؤلفه‌های کوآرنیونی هستند. تبدیل معکوس از کوآرنیون‌ها به زوایای اویلر نیز باید به کار گرفته شود تا نتایج محاسبات کوآرنیونی به شهود فیزیکی ترجمه شود. این روابط به صورت روابط (۲۹) هستند [۱].

$$\begin{cases} \tan \psi = \frac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \\ \sin \theta = -2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ \tan \varphi = \frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \end{cases} \quad (29)$$

بنابراین، محاسبات در فضای کوآرنیون انجام می‌شود. اما نتایج بر حسب زوایای اویلر بیان خواهند شد. برای انتشار کوآرنیون‌ها می‌توان از نرخ تغییرات آنها طبق روابط ماریسی (۳۰) استفاده کرد [۱].



شکل ۱- تغییر درایه های کواترنیون



شکل ۲- تغییر زوایای اویلر سرعت

**مؤلفه های بردار سرعت در دستگاه بدنی**

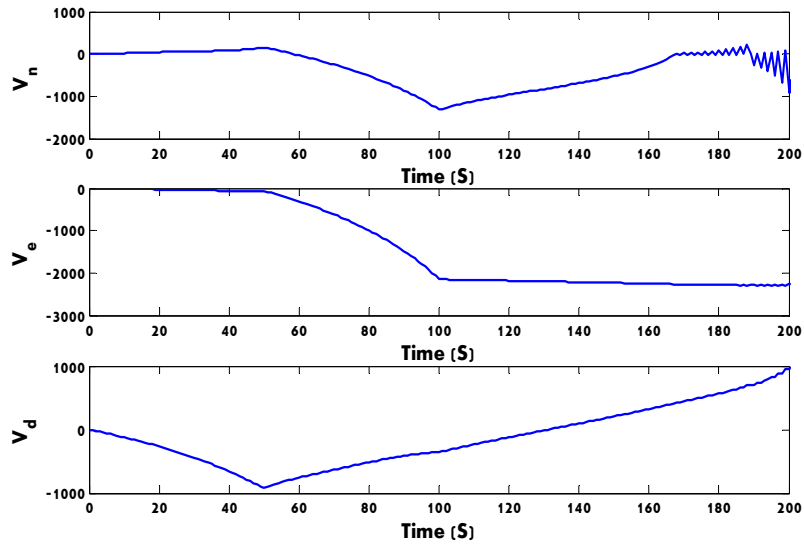
در این نمودارها که در شکل (۴) نشان داده شده است. می توان ملاحظه کرد که مطابق انتظار، مؤلفه سرعت در راستای محور  $y$  بدنی صفر است. زیرا، همان طور که از دستور کنترلی پیداست حرکت در صفحه  $x-z$  بدنی صورت خواهد پذیرفت.

**مؤلفه های بردار سرعت در دستگاه باد**

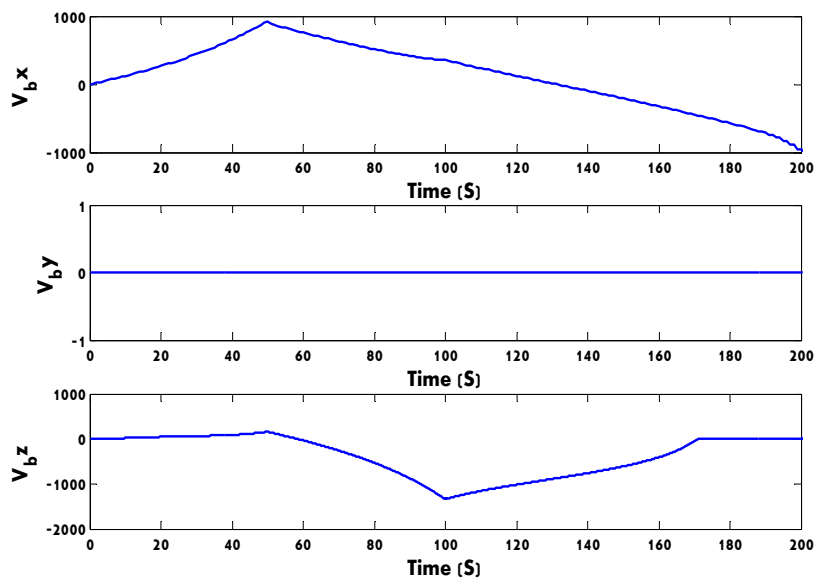
مؤلفه های سرعت در دستگاه باد که در شکل (۵) آمده نیز از ماتریس تبدیل بین دستگاه بدنی و باد به دست آمده است.

**مؤلفه های بردار سرعت در دستگاه ناوبری**

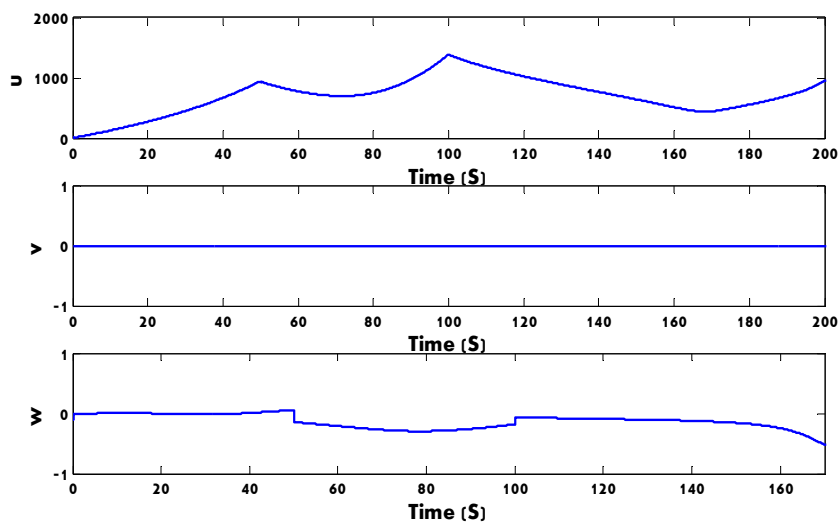
مؤلفه های سرعت در این دستگاه به شکل (۳) به دست آمده اند. مطابق با این شکل ملاحظه می شود که به دلیل اینکه سرعت در راستای شمال و شرق منفی است، انتظار این می رود که وسیله به سمت جنوب غربی حرکت کرده باشد. همچنین، سرعت در راستای پایین نیز نشان از صعود وسیله در ۱۰۰ ثانیه اول دارد، زیرا در این مدت مقدار آن منفی است.



شکل ۳- تغییر مؤلفه‌های سرعت در دستگاه ناوبری



شکل ۴- تغییر مؤلفه‌های سرعت در دستگاه بدنی



شکل ۵- تغییر مؤلفه‌های سرعت در دستگاه باد



با مؤلفه‌های سرعت ناوبری که در شکل ۳ ارائه شده است، همخوانی دارد.

### نتیجه‌گیری

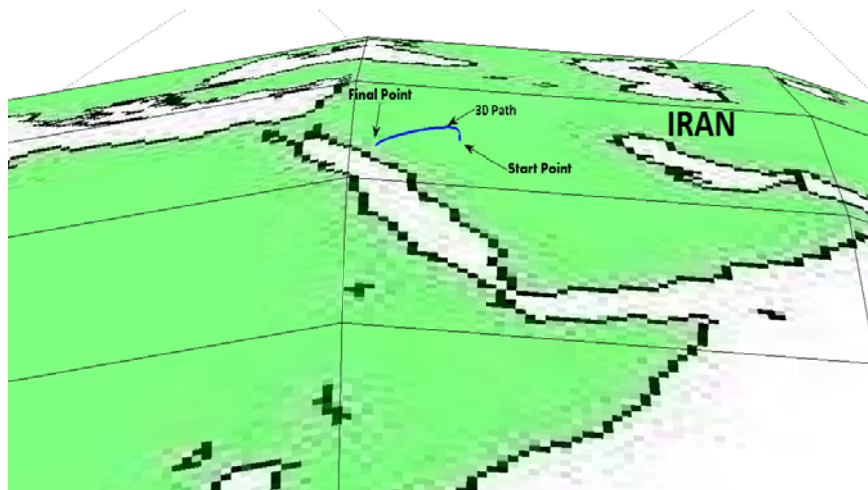
با توجه به آنچه بیان شد، نتیجه‌گیری می‌شود که برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی یک سیستم دینامیکی به ویژه سیستم دینامیکی هوافضایی باید یک روند منسجم را دنبال کرد به طوری که این مدل‌سازی‌ها نسبت به چارچوب‌های مناسب انجام شود. انتخاب چارچوب مناسب به درک بهتر مسئله و شفافیت در نتایج نهایی منجر خواهد شد. همچنین، با استفاده از ابزارهای مناسب ریاضیاتی مشاهده شد که می‌توان ترجمه‌های متفاوتی از مسئله را نسبت به چارچوب‌های دیگر بیان کرد و یا نحوه دیگری از نمایش پارامترها را بدون نیاز به حل آنها به دست آورد.

### مسیر سه بعدی پروازی

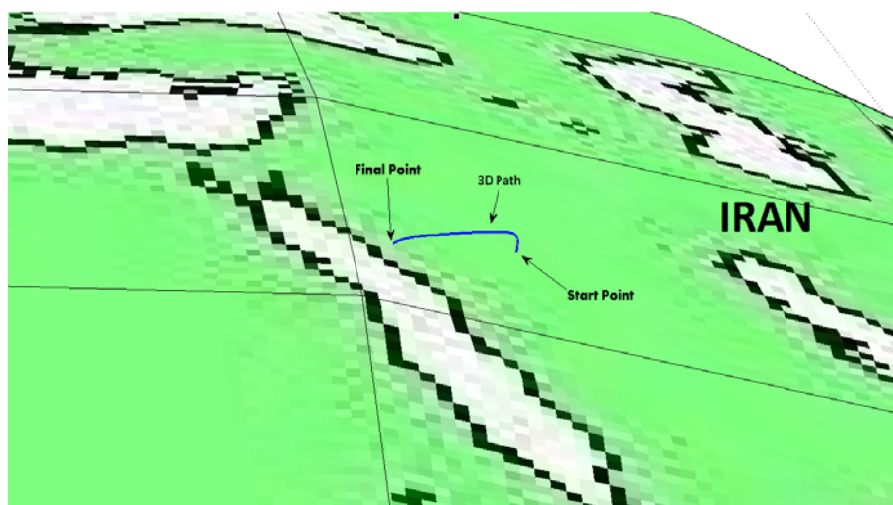
برای رسم مسیر پروازی از مؤلفه‌های مکانی در دستگاه ECEF استفاده شده که نتیجه به صورت شکل‌های (۶) و (۷) تبدیل شده است. در شکل‌های (۶) و (۷) مسیر سه بعدی پروازی در دو نما نشان داده شده است.

### مسیر زمینی

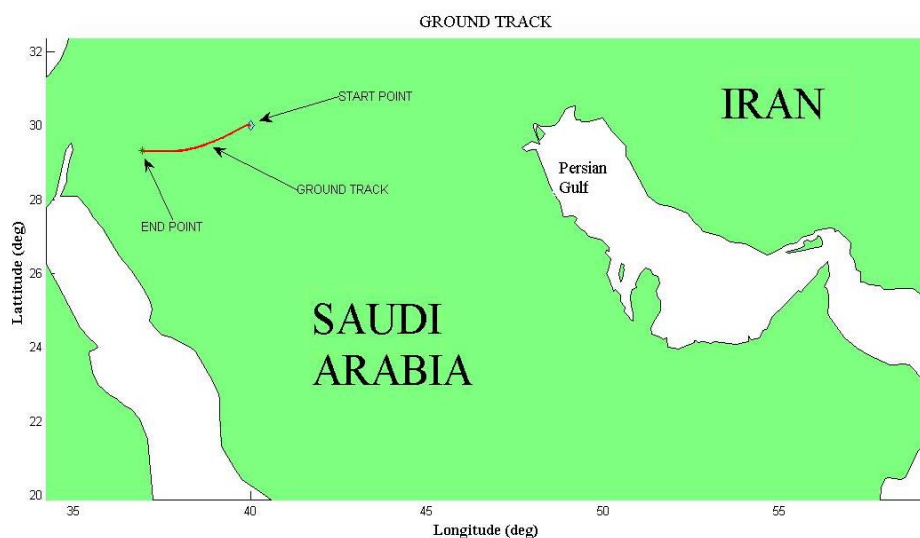
برای بررسی بهتر می‌توان رد زمینی این وسیله را در شکل (۸) مشاهده کرد. در این شکل ملاحظه می‌شود که مسیر زمینی<sup>۱۳</sup> خط کاملاً مستقیمی را طی نکرده است و علت آن شتاب‌های کوریولیس وارد بر وسیله است. همان گونه که از شکل پیداست موشک حرکت خود را از طول جغرافیایی ۴۰ درجه و عرض جغرافیایی ۳۰ درجه آغاز می‌کند. این مسیر



شکل ۶- مسیر پرواز سه بعدی (الف)



شکل ۷- مسیر پرواز سه بعدی (ب)



شکل ۸- رد مسیر زمینی

- [3] Anderson, J. D., *Aircraft Performance and Design*, Library of Congress-in-Publication, International Edition, 1999.
- [3] Saberi-Tavakoli, M. and Saghafi, F., "Collision-Free Control for Multiple Satellites via Formation Feedback of Virtual Structure" *Journal of Space Science & Technology*, Vol. 5, No. 4, 2013, pp.47-60.
- [5] Jekeli, C., *Inertial Navigation systems with Geodetic Applications*, Walter de Gruyter Berlin New York, 2001.

## مراجع

- [1] Zipfel, P. H., *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*, Edition Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2000.
- [2] Titterton, D. H. and Weston, J. L. *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Second Edition, Volume 207, Progress in Astronautics and Aeronautics, 2004.