

(یادداشت فنی)

# کنترل بهینه خطی یک وسیله هوایی، با در نظر گرفتن مدل دینامیکی موتور پیشران و بازخورد سرعت

در این مقاله کنترل بهینه یک وسیله هوایی با در نظر گرفتن دینامیک جسم پرنده به همراه مدل‌سازی موتور پیشران هوازی و بازخورد سرعت آن مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور، ابتدا معادلات دینامیکی وسیله هوایی استخراج و مدل ریاضی موتور رانش بدست آمده است. سپس، معادلات دینامیک غیرخطی وسیله پرنده و معادلات موتور با یکدیگر ترکیب شده است. با بیان معادلات دینامیکی خطی سازی شده در فضای حالت، فرمولاسیون کنترل بهینه خطی با معادلات قیدی دینامیک سیستم در نظر گرفته شده و تابع هزینه کمینه انرژی بدست آمده است. با حل مسئله کنترل بهینه خطی، شبیه‌سازی‌های متنوعی ارایه شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن شرایط اولیه مختلف و عدم قطعیت در مدل‌سازی سیستم، کنترل بهینه سیستم به خوبی انجام شده است. توجه شود که اثر تغییر ضرایب وزنی مسئله کنترل بهینه بر مسیر کنترلی و بهینه‌سازی مصرف انرژی بسیار حایز اهمیت است. همچنین، نتایج بدست آمده نشان‌دهنده کارایی روش پیشنهادی در مدل‌سازی و کنترل وسیله هوایی با پیشران هوازی است.

واژه‌های کلیدی: وسیله هوایی، موتور پیشران، مدل دینامیکی، کنترل بهینه خطی، بازخورد سرعت

مصطفی ناظمی زاده<sup>۱\*</sup>، استادیار، مجتمع مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر  
علیرضا بابایی<sup>۲</sup>، استادیار، مجتمع مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر

\* نویسنده مخاطب، آدرس: تهران، کدپستی: ۱۵۸۷۵-۱۷۷۴

## Linear Optimal Control of an Aerial Vehicle by Utilizing the Dynamic Model of Propulsion System and Velocity Feedback

*In this article, optimal control of an aerial vehicle is investigated with consideration of its dynamics and modeling of an air-breathing propulsion system, using its velocity feedback. To this end, the dynamic equations of the vehicle and mathematical model of the air-breathing propulsion system are derived. Then, the non-linear dynamic equations of the vehicle and the equations of the propulsion system are combined. By presenting dynamic equations in state space, the linear optimal control formulation with dynamic constraint equations and minimum energy cost function is developed. By solving this optimal control problem, variant simulations are performed. Note, considering different initial conditions and uncertainty, the system's optimal control has been implemented fairly well. Moreover, the weighting coefficients of the optimal control problem considerably affect the optimal path and energy consumption. The obtained results indicate the applicability of the proposed method for modeling and control of the aerial vehicle with an air-breathing propulsion system.*

**Keywords:** Aerial Vehicle, Thruster Engine, Dynamic model, Linear Optimal Control, Velocity Feedback

**M. Nazemi Zade<sup>1\*</sup>**, Assistant Professor, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology

**A. Babaei<sup>2</sup>**, Assistant Professor, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology

\*Corresponding Author, Postal Code: 15875-1774, Tehran, IRAN

nazemi@mut-es. ac. ir

## مقدمه

امروزه، وسیله‌های هوایی متنوعی نظیر هواپیماها، موشک‌ها و غیره به منظور پروازهای هوایی ارابه شده‌است. به منظور کاربردهای عملیاتی این وسایل، شناسایی دینامیک و تحلیل حرکتی اجسام هوایی بسیار حایز اهمیت است. در حقیقت، مدلسازی دینامیکی دقیق و کنترل پرواز این اجسام یکی از زمینه‌های مهم تحقیقاتی هوافضا بوده و مورد توجه محققان بسیاری بوده است [۱-۳]. آلن و همکارانش [۴] به ارابه مدل دینامیکی و تحلیل کنترلی در مانور قائم یک وسیله هوایی بدون سرنشین پرداختند. آنها ورودی کنترلی را نیروی پیشران وارد بر جسم پرنده در نظر گرفته و از یک روش کنترلی انتگرالی برای هدایت جسم پرنده پرداختند. در مرجع [۵] کنترل بهینه یک جسم پرنده عمود پرواز شش درجه آزادی پرداخته شده است. در این مرجع با در نظر گرفتن معادلات دینامیکی وسیله هوایی، روش کنترل بهینه خطی برای کنترل مسیر حرکت و مانور آن بکار گرفته شده است. بابایی و ستاینده [۶] به طراحی قانون هدایت بهینه غیرخطی جسم پرنده برای اهداف با مانور بالا پرداختند. آنها یک قانون هدایت جدید برای اهداف براساس روش کنترل بهینه غیرخطی و معادلات ریکاتی وابسته به حالت ارابه کردند. لوین و همکارانش [۷] به مطالعه دینامیک پرواز و مانور سریع یک جسم پرنده کوچک با استفاده از روش کنترل بهینه پرداختند. آنها از روش کنترل بهینه برای طراحی مسیر وسیله استفاده کردند، اما مدل دینامیکی و کنترل بهینه جسم را بدون مدلسازی موتور رانش آن انجام دادند. در حقیقت کنترل بهینه یکی از روش‌های کاربردی مورد توجه در طراحی مسیر و کنترل سیستم‌های دینامیکی محسوب می‌شود. ناظمی زاده و دیگران [۸-۱۰] با استفاده از روش کنترل بهینه به طراحی مسیر ربات‌های متحرک با در نظر گرفتن مدل دینامیک غیرخطی پرداختند. همچنین، در مراجع [۱۱-۱۳]، از روش کنترل بهینه غیرخطی با معادله ریکاتی وابسته به حالت برای کنترل مسیر و هدایت انواع سیستم‌های رباتیکی استفاده شد. وسیله‌های هوایی نیروی محرک و پیشران خود را توسط انواع موتورهای هوازی بدست می‌آورند. بنابراین، شناخت و مدلسازی موتور پیشران در تحلیل دینامیکی و کنترل اجسام پرنده هوایی حایز اهمیت است. موتورهای هوازی واکنشی به عنوان موتور یا محرک‌هایی شناخته می‌شود که نیروی پیشران آن به وسیله خروج دبی جرمی هوا ایجاد می‌شود. این تعریف کلی شامل توربوجت‌ها، توربوفن‌ها، موتورهای راکت، رمجت-ها و جت‌پالس‌ها است

[۱۴-۱۶]. مروری بر ادبیات موضوع موتورهای رمجت در مراجع [۱۷-۱۹] ارابه شده است. لی موینه [۲۰] به تحلیل سیستم‌های پیشران رمجت و راکتی پرداخت. وی معادلات نیروی پیشران موتور رمجت بر حسب مصرف سوخت مخصوص هیدروژن را بیان کرد. رودنیک [۲۱] با بیان معادلاتی مشابه، به استخراج معادلات لوله‌های پیشران پرداخته و سپس این معادلات را برای موتور رمجت ارابه کرد. مارش [۲۲] به بررسی معادلات موتور رمجت پرداخت و در روابط ارابه شده، نیروی درگ وارد بر بدنه موتور رمجت را در نظر گرفت. از طرفی، برای کنترل جسم هوایی بایستی دینامیک وسیله پرنده به همراه مدل موتور رانش در نظر گرفته شود. لی و دیگران [۲۳] به کنترل وسیله مافوق صوت هوازی با در نظر گرفتن اثرات الاستیسیته پرداختند. سپس، آنها کنترل مسیر را با استفاده از نیروی پیشران به عنوان ورودی مسئله انجام دادند. در مرجع [۲۴] معادلات خطی شده دینامیک طولی یک وسیله هوایی مافوق صوت بیان شده و سپس یک روش کنترل خطی فیدبک دار برای کنترل مسیر مشخص وسیله با در نظر گرفتن ارتفاع، سرعت و زاویه حمله مشخص ارابه شده است. همچنین، مدلسازی موتور پیشران مورد توجه قرار گرفته است.

با بررسی ادبیات موضوع مشاهده می‌شود که مطالعه دینامیک وسیله پرنده با در نظر گرفتن معادلات حاکم بر موتور پیشران آن تاکنون مورد توجه قرار نگرفته است. مطالعه پیش‌رو، به کنترل بهینه یک وسیله هوایی با مدلسازی موتور پیشران و بازخورد سرعت جسم پرنده می‌پردازد. بدین منظور، ابتدا مدلسازی موتور هوازی با بیان معادلات حاکم بر آن انجام می‌شود. سپس، معادلات دینامیک غیرخطی وسیله پرنده بیان و معادلات موتور پیشران هوازی با آن ادغام می‌شود. با استفاده از روش کنترل بهینه به کنترل وسیله هوایی با لحاظ بازخورد سرعت پرداخته می‌شود. با حل معادلات بهینگی، شبیه‌سازی‌های متنوعی برای کنترل وسیله هوایی انجام و نتایج ارابه می‌شود. سپس، معادلات حاکم بر موتور رمجت ارابه می‌شود. در بخش بعدی دینامیک غیرخطی وسیله پرنده با لحاظ مدل موتور پیشران رمجت استخراج می‌شود. بدین منظور، ابتدا معادله نیروی پیشران-مصرف سوخت حاکم بر موتور رمجت بدست آمده و با معادلات دینامیک پرواز طولی وسیله پرنده ترکیب می‌شود. در بخش چهارم فرمولاسیون کنترل بهینه ارابه شده و در بخش پنجم از روش کنترل بهینه برای کنترل سرعت حرکت وسیله پرنده در پرواز تراز مشخصی استفاده و نتایج ارابه می‌شود. در بخش

که در آن،  $M$  و  $M_e$  ماخ جریان در ورودی و خروجی موتور است. همچنین،  $P_a$  و  $P_{0a}$  فشار و فشار سکون در دهانه ورودی موتور است. پارامترهای  $P_e$  و  $P_{06}$  فشار و فشار سکون در دهانه خروجی موتور است. بنابراین در موتور راجت ایده‌آل، عدد ماخ ورودی و خروجی یکسان است. پس، با فرض اینکه  $a$  برابر با سرعت صوت در هوا باشد، سرعت جریان خروجی برابر است با [۱۶]:

$$u_e = \frac{a_e}{a_a} u \Rightarrow u_e = \sqrt{T_{04}/T_{0a}} u. \quad (4)$$

درحالی‌که،  $a = \sqrt{\gamma RT}$  و  $\gamma$  ضریب اتمیسیته هوا است. از طرفی، با در نظر گرفتن موازنه انرژی در محفظه سوخت، رابطه بین نسبت سوخت و انتالپی جریان برابر است با [۱۶]:

$$(1+f)h_{04} = h_{02} + f Q_R, \quad (5)$$

که در آن،  $Q_R$  ارزش حرارتی سوخت است. لذا نسبت سوخت به هوا برابر است با [۱۶]:

$$f = \frac{(T_{04}/T_{0a}) - 1}{(Q_R/c_p T_{0a}) - (T_{04}/T_{0a})}, \quad (6)$$

که در آن، دمای سکون  $T_{a0}$  در ورودی با دمای ورودی  $T_a$  رابطه دارد [۱۶]:

$$T_{a0} = T_a \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right). \quad (7)$$

بنابراین، با ترکیب روابط بالا، نسبت نیروی پیشران به دبی جرمی جریان برای موتور ایده‌آل راجت برابر است با [۱۶]:

$$\frac{F}{\dot{m}_a} = M \sqrt{\gamma RT_a}, \quad (8)$$

$$\left[ (1+f) \sqrt{T_{04}/T_a} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/2} - 1 \right].$$

لذا، با ترکیب روابط (۱) و (۸) در نهایت معادلات دینامیک غیرخطی وسیله هوایی با موتور پیشران راجت استخراج می‌شود. لازم به توضیح است بحث دینامیک وسیله هوایی [۲۵] در پیوست بیان شده است.

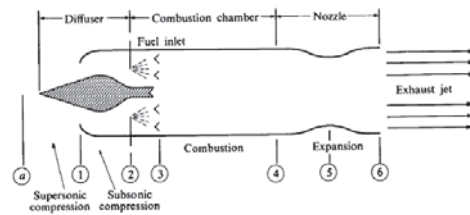
### دینامیک طولی وسیله هوایی

فرض کنیم وسیله پرنده دارای حرکت طولی در صفحه  $xz$  بوده و از حرکت جانبی آن صرف‌نظر شود. در شکل ۲ شماتیک وسیله پرنده نشان داده شده است.

انتهای، نتایج کنترلی بدست آمده بیان شده که نشان‌دهنده کارایی فرمولاسیون و روش ارایه شده است.

### مدلسازی موتور پیشران

برای مدلسازی و تحلیل نیروی پیشران موتور راجت، مدل‌های مختلفی ارایه شده است. مدل موتور راجت با در نظر گرفتن سیکل ترمودینامیکی برایتون، یکی از متداول‌ترین مدل‌های ارایه شده برای این موتور راجت بوده و در بسیاری از مراجع مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۱]. به منظور مطالعه دقیق‌تر، شکل ۱ شماتیک از موتور راجت را نشان می‌دهد.



شکل (۱): شماتیک موتور پیشران راجت [۱۶].

مطابق با شکل ۱، موتور راجت براساس سیکل برایتون مدلسازی شده و مراحل سیکل به صورت زیر بیان می‌شود:

- فرآیند  $a \leftarrow 2$ : پخش و تراکم آیزوتروپیک با کاهش عدد ماخ در بخش ورودی موتور راجت،
- فرآیند  $2 \leftarrow 3$ : احتراق فشار ثابت در محفظه احتراق،
- فرآیند  $3 \leftarrow 4$ : انبساط ایزوتروپیک در نازل و
- فرآیند  $a \leftarrow 6$ : تخلیه هوا در اتمسفر.

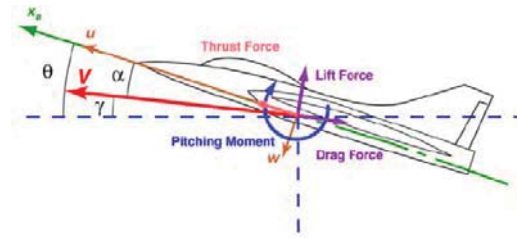
بنابراین، براساس سیکل برایتون، نیروی پیشران موتور راجت برابر است با [۱۶]:

$$F = \dot{m}_a [(1+f)u_e - u] \quad (9)$$

که در آن،  $\dot{m}_a$  دبی جرمی جریان هوا،  $u$  سرعت جریان در ورودی،  $u_e$  سرعت جریان خروجی و  $f$  نسبت سوخت به هوا است. از طرفی، مطابق با شکل ۱ و با در نظر گرفتن فرآیند تراکم و انبساط ایزوتروپیک، مقدار فشار سکون و استاتیکی در ورودی و خروجی موتور یکسان بوده و روابط زیر برقرار است [۱۶]:

$$\frac{P_{0a}}{P_a} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (2)$$

$$\frac{P_{06}}{P_e} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (3)$$



شکل (۲): شماتیک وسیله پرنده [۲۶].

چنانچه دستگاه مختصات کارتزین  $xz$  بدنی متصل به وسیله پرنده در نظر گرفته شود، معادلات حرکت طولی مرتبه چهارم جسم برابر است با [۲۶]:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{F_x}{m} - g \sin \theta - qw, \\ \dot{w} = \frac{F_z}{m} + g \cos \theta + qu, \\ \dot{q} = M / I_{yy}, \\ \dot{\theta} = q, \end{cases} \quad (12)$$

که در آنها،  $u$  سرعت طولی،  $w$  سرعت قائم،  $F_x$  برآیند نیرویی در راستای طولی،  $F_z$  برآیند نیرویی در راستای قائم،  $\theta$  زاویه فراز،  $q$  سرعت زاویه‌ای فراز،  $m$  جرم پرنده و  $I_{yy}$  ممان اینرسی حول محور قائم بر صفحه حرکت است. در این حالت بردار حالت جسم برابر با  $\bar{X} = [u \ w \ q \ \theta]^T$  در نظر گرفته می‌شود. روش دیگر، بیان معادلات حرکت طولی آن است که به جای استفاده از مولفه‌های سرعت در دستگاه کارتزین بدنی، از مولفه‌های مماسی-عمودی مسیر حرکت وسیله پرنده استفاده شود. در این حالت با در نظر گرفتن مسیر پرواز در امتداد بردار سرعت جسم پرنده، معادلات حرکت از روابط زیر بدست می‌آید [۲۶]:

$$\begin{cases} \dot{V} = (T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma) / m, \\ \dot{\gamma} = (T \sin \alpha + L - mg \cos \gamma) / mV, \\ \dot{q} = M / I_{yy}, \\ \dot{\theta} = q, \end{cases} \quad (13)$$

که در آنها،  $V$  سرعت مطلق جسم پرنده،  $T$  نیروی تراست،  $\gamma$  زاویه مسیر پرواز،  $\alpha$  زاویه حمله،  $D$  نیروی پسا و  $L$  نیروی برآ است. در دستگاه مختصات مماسی-عمودی، بردار حالت جسم برابر با  $\bar{X} = [V \ \gamma \ q \ \theta]^T$  در نظر گرفته می‌شود. یکی از روش‌های متداول برای بیان معادلات حرکت طولی جسم پرنده، ترکیب روابط دستگاه بدنی کارتزین و دستگاه مماسی-عمودی است. در این حالت با فرض زاویه حمله  $\alpha = \theta - \gamma$ ، معادلات دینامیک پرواز ترکیبی مرتبه چهارم به صورت زیر حاصل می‌شود [۲۶]:

$$\begin{cases} \dot{V} = (T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma) / m, \\ \dot{\gamma} = (T \sin \alpha + L - mg \cos \gamma) / mV, \\ \dot{q} = M / I_{yy}, \\ \dot{\alpha} = q - \frac{1}{mV} (T \sin \alpha + L - mg \cos \gamma). \end{cases} \quad (14)$$

متغیرهای حالت  $\gamma$  و  $V$  دارای تغییرات آهسته‌تری نسبت به متغیرهای  $\alpha$  و  $q$  هستند. بنابراین، معادلات حالت حرکت طولی را می‌توان به دو بخش حرکت زمان تناوب بالا و حرکت زمان تناوب کوچک تقسیم کرد. اثر متقابل این دو مود حرکتی بر روی یکدیگر ناچیز بوده و از این رو می‌توان معادلات حرکت طولی وسیله پرنده را کاهش مرتبه داد و تنها مود حرکتی زمان تناوب بالا را در نظر گرفت زیرا سرعت جسم پرنده مورد توجه است.

در رابطه (۱۴)، معادلات دینامیک طولی وسیله پرنده با در نظر گرفتن نیروی تراست به عنوان ورودی سیستم بدست آمد. در این بخش معادلات موتور رم جت بیان شده و نیروی تراست بر حسب نسبت سوخت به هوا  $f$  بیان می‌شود. برای موتور رم جت رابطه بین تراست و مصرف سوخت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \rho_a A_0 V^2 \left[ \left( \sqrt{1+f} \sqrt{1 + \frac{f Q_R}{c_p T_a \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} V^2 \right)}} \right) - 1 \right] \quad (15)$$

بنابراین، به منظور کنترل مسیر حرکتی وسیله پرنده دارای موتور رم جت، بایستی نیروی پیشرانش رابطه (۱۵) در معادلات حرکت رابطه (۱۴) جاگذاری شود تا متغیر کنترل سرعت  $T$  به متغیر  $f$  مرتبط شود.

### فرمولاسیون کنترل بهینه خطی

به منظور بیان روش کنترل بهینه، معادلات فضای حالت دینامیکی سیستم در شکل کلی زیر بیان می‌شود [۲۹]:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \quad (16)$$

که در آن،  $\bar{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$  بردار حالت و  $\bar{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_m(t)]^T$  بردار کنترل ورودی سیستم است. در مسئله کنترل بهینه، هدف یافتن کنترل قابل قبول  $\bar{u}^*$  است که مسیر بهینه  $\bar{x}^*$  را نتیجه داده و تابع هدف زیر را کمینه کند:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt. \quad (17)$$

تابع لیپانوف  $V = \bar{X}^T P \bar{X}$  تابعی مثبت معین فرض شود، در اینصورت مشتق تابع لیپانوف  $\dot{V} = \dot{\bar{X}}^T P \bar{X} + \bar{X}^T P \dot{\bar{X}}$  مقداری منفی نیمه معین است و پایداری سیستم حلقه بسته برقرار است. بدین منظور معادلات سیستم حلقه بسته در نظر گرفته می‌شود و داریم:

$$\dot{\bar{X}} = (A - BK)\bar{X}. \quad (27)$$

در این صورت مشتق تابع لیپانوف برابر است با:

$$\dot{V} = \dot{\bar{X}}^T P \bar{X} + \bar{X}^T P \dot{\bar{X}} = \bar{X}^T \left[ (A - BR^{-1}B^T P)^T P + P(A - BR^{-1}B^T P) \right] \bar{X}. \quad (28)$$

از طرفی، با جاگذاری (۲۶) در (۲۸)، در نهایت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\dot{V} = \bar{X}^T \left[ -Q - BR^{-1}B^T P \right] \bar{X}. \quad (29)$$

از سوی دیگر، چون ماتریس ضرایب وزنی  $R$  مثبت معین و  $Q$  مثبت نیمه معین فرض می‌شود و  $P$  ماتریس مثبت معین است. بنابراین، عبارت مشتق تابع لیپانوف منفی و سیستم پایدار است.

### شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش به بررسی حرکت وسیله پرنده با در نظر گرفتن معادلات دینامیک پرواز طولی و نیروی تراست موتور رمجت پرداخته می‌شود. فرض می‌شود که وسیله پرنده دارای پرواز تراز بوده و با ثابت بودن زاویه حمله و مسیر پرواز، به ردیابی سرعت مطلوب می‌پردازد. پارامترهای سیستم برابر با جرم کلی  $m = 600 \text{ kg}$  و ضریب درگ  $C_d = 0.5$  در نظر گرفته می‌شود. دیگر متغیرهای سیستم برابر است با:  $T_a = 216 \text{ K}$ ،  $A = 0.1275 \text{ m}^2$ ،  $Q_R = 120 \times 10^6 \text{ J/kg}$  و  $a_0 = 295 \text{ m/s}$ ،  $\bar{\gamma} = 1.4$ ،  $\rho = 1.22 \text{ kg/m}^3$ ، اثرات  $C_p = 1003 \text{ j/kg K}$  در شبیه‌سازی اول، اثرات شرایط اولیه بر سرعت وسیله پرنده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این شبیه‌سازی، سرعت مطلوب می‌گیرد. در نظر گرفته شده و شرایط اولیه پرواز برابر با سه حالت:  $V_0 = 1.25, 1.5, 1.75 \text{ Mach}$  است. زمان مطلوب همگرایی پاسخ برابر با  $t_f = 5 \text{ s}$  در نظر گرفته می‌شود. ضرایب وزنی برابر با  $Q = 10$  و  $R = 60 \times 10^6$  در نظر گرفته می‌شود. شکل ۳ سرعت وسیله پرنده را نشان داده شده است.

برای حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش حساب تغییرات، تابع همیلتونین به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود.

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}(t), t) = L(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \bar{\lambda}^T(t) \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \quad (18)$$

که در آن،  $\bar{\lambda}(t)$  بردار شبه حالت نامیده شده و شرط لازم بهیگی سیستم آن است که در وضعیت بهینه  $\bar{x}^*(t)$  و  $\bar{u}^*(t)$  مجموعه معادلات بهیگی ارضا شود که عبارتند از [۲۹]:

$$\dot{\bar{x}}^* = \frac{\partial H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{\lambda}^*(t)}, \quad (19)$$

$$\dot{\bar{\lambda}}^* = - \frac{\partial H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{x}^*(t)}, \quad (20)$$

$$0 = \frac{\partial H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{u}^*(t)}. \quad (21)$$

علاوه بر این، شرط کافی برای کمینه بودن تابع هزینه و بهیگی سیستم در وضعیت بهینه  $\bar{x}^*$  و  $\bar{u}^*$  آن است که مشتق دوم همیلتونین نسبت به ورودی بهینه مثبت باشد، یعنی:

$$\frac{\partial^2 H(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\lambda}^*(t), t)}{\partial \bar{u}^{*2}(t)} > 0. \quad (22)$$

چنانچه معادلات سیستم خطی در نظر گرفته شود، در روش کنترلی تنظیم کننده خطی بهینه، تابع هدف برابر است با:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\bar{X}^T Q \bar{X} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt, \quad (23)$$

که در آن، ماتریس‌های  $Q$  و  $R$  به ترتیب ماتریس‌های وزنی بردار حالت و کنترل بوده و ماتریسی مثبت معین متقارن فرض می‌شوند. بنابراین، با استفاده از روش کنترل بهینه و تشکیل تابع همیلتونین، بر اساس روابط (۲۰) و (۲۱)، شرایط بهیگی بردار شبه حالت و کنترل ورودی برابر است با:

$$\dot{\bar{\lambda}}^* = A^T \bar{\lambda}^* + Q \bar{X}^*, \quad (24)$$

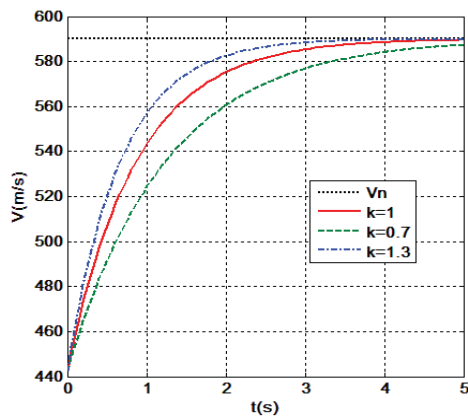
$$\bar{u}^* = -R^{-1} B^T \bar{\lambda}^*. \quad (25)$$

با فرض اینکه  $\bar{\lambda} = P \bar{X}$  بوده که  $P$  ماتریس مثبت معین است، با صرفنظر از بالانویس ستاره، قانون کنترلی بهینه بازخورد برابر با  $\bar{u} = -R^{-1} B^T P \bar{X}$  بوده و در نهایت ماتریس  $P$  بایستی در معادله جبری ریکاتی صدق کند که عبارتست از:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (26)$$

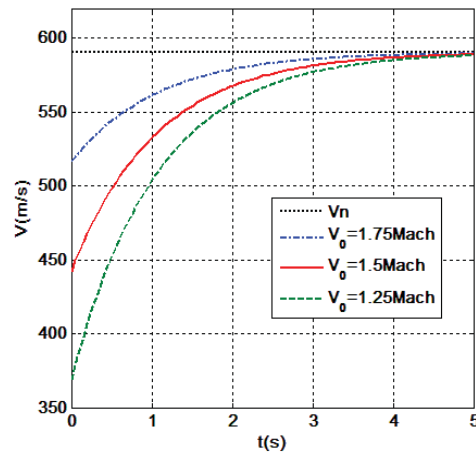
بنابر اصل لیپانوف، بدست آوردن ماتریس مثبت معین  $P$  پایداری سیستم حلقه بسته را ایجاب می‌کند. برای پایداری سیستم حلقه بسته،  $P$  ماتریس مثبت معین است. زیرا چنانچه

(۸) که بیانگر نیروی تراست موتور برحسب نسبت سوخت به هوای آن است، از ضریب  $k$  که بیانگر عدم قطعیت در مدلسازی موتور است، استفاده و پاسخ کنترلی بررسی شده است. ضریب  $k=1$  بیانگر مدل دقیق است. شکل ۵ سرعت جسم را بر حسب مقادیر مختلف ضریب عدم قطعیت نشان داده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با تغییر پارامتر عدم قطعیت، پاسخ گذرا تغییر می‌کند اما در نهایت روش کنترل بهینه توانمند در ردیابی مسیر مطلوب بوده است.



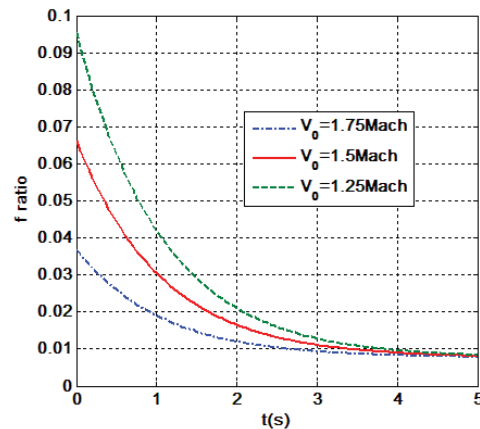
شکل (۵): سرعت بهینه وسیله پرنده برای عدم قطعیت های مختلف.

در شبیه‌سازی دیگر، اثرات ضریب وزنی بر مسیر سیستم غیرخطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این شبیه‌سازی، سرعت نامی  $V_N = 2Mach$  در نظر گرفته شده و شرایط اولیه پرواز برابر با  $V_0 = 1.5Mach$  است. زمان کنترلی برابر با  $t_f = 5s$  در نظر گرفته می‌شود. ضرایب وزنی کنترل  $R = 60 \times 10^6$  در نظر گرفته می‌شود. داده های این شبیه‌سازی مشابه با شبیه‌سازی قبل در نظر گرفته شده با این تفاوت که سه مقدار برای ضریب وزنی حالت:  $Q_1 = 1$ ،  $Q_2 = 5$  و  $Q_3 = 10$  در نظر گرفته می‌شود. شکل ۶ به اثر افزایش ضریب وزنی حالت بر مسیر حرکت نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب وزنی مربوط به متغیر حالت، متغیر حالت در زمان کوتاه‌تر به ردیابی سرعت نهایی می‌رسد. بنابراین، افزایش ضریب وزنی حالت نشان‌دهنده اهمیت بیشتر به متغیرهای حالت بوده و از این رو ردیابی سرعت در زمان کمتری انجام می‌شود. همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب وزنی حالت، تلاش کنترلی بهینه بیشتری نیاز بوده و مصرف سوخت بهینه موتور افزایش می‌یابد. بنابراین، انتخاب ضرایب وزنی در روش کنترل بهینه



شکل (۳): سرعت بهینه وسیله پرنده برای شرایط اولیه مختلف.

همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، روش کنترلی پیشنهاد شده با وجود تغییرات شرایط اولیه قادر به ردیابی سرعت نهایی بوده و پس از طی مسیر هموار در مدت زمان کنترلی به مقدار نهایی رسیده‌اند. البته هرچقدر اختلاف شرایط اولیه و نهایی سرعت متفاوت باشد، زمان مورد نیاز برای ردیابی افزایش می‌یابد. از طرفی، تغییرات مصرف سوخت برای سرعت‌های مختلف وسیله پرنده نیز در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل (۴): مصرف انرژی وسیله پرنده برای شرایط اولیه مختلف.

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، با تغییر شرایط اولیه، زمان مورد نیاز برای کنترل بهینه و ماکزیم مصرف سوخت افزایش می‌یابد. با افزایش اختلاف سرعت اولیه و سرعت، تلاش کنترلی بهینه و زمان کنترلی برای ردیابی سرعت نهایی افزایش می‌یابد.

در مطالعه دیگری، عدم قطعیت مدلسازی موتور رم‌جت بر رفتار کنترلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، در معادله



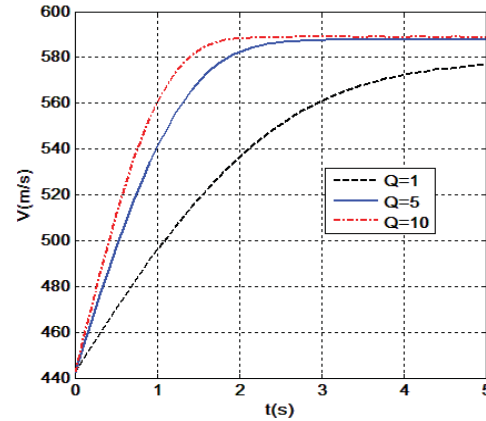
کنترل بهینه وضعیت وسیله هوایی با در نظر گرفتن مدل دینامیکی موتورپیشران و بازخورد سرعت (یادداشت فنی)

ردیابی بهینه سرعت مطلوب و همچنین میزان مصرف سوخت بهینه سیستم افزایش می‌یابد. البته برای شرایط اولیه مختلف، روش کنترلی قادر به ردیابی سرعت مطلوب است. از طرفی، عدم قطعیت در مدلسازی موتور پیشران با تعریف پارامتری شبیه‌سازی گردید و نشان داده شد که اگر چه عدم قطعیت در مدلسازی بر پاسخ گذار اثر گذار است، اما با استفاده از روش کنترل بهینه، با وجود عدم قطعیت‌های مختلف سیستم رانش، جسم پرنده قادر به ردیابی مقدار نهایی و مطلوب است. از طرفی برای بهینه‌سازی مصرف سوخت، تغییرات ضرایب وزنی بررسی شد. نتایج نشان داد که با افزایش ضریب وزنی مربوط به متغیر حالت، ردیابی سرعت مطلوب در مدت زمان کوتاه‌تری انجام شده و البته مصرف سوخت بهینه موتور رانش نیز افزایش می‌یابد. لذا انتخاب ضرایب وزنی در روش کنترل بهینه حایز اهمیت و میزان توجه طراح را به هر یک از معیارهای تابع هزینه مشخص می‌کند. در نهایت، نتایج بدست آمده نشان‌دهنده کارایی روش پیشنهادی در مدلسازی و کنترل وسیله پرنده دارای موتور پیشران هوازی است.

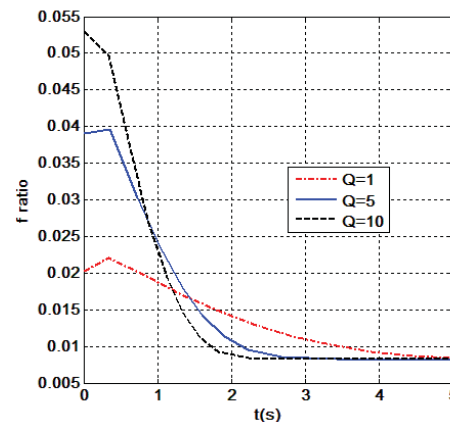
## مراجع

- [1] Kargamajafi, A. and Azizi, M., "Conceptual Design of the Spacecraft Attitude Control Based on the Plane Displacement of the Propulsion System", *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, Vol. 2, No. 4, pp. 27-35, 2019.
- [2] Espinoza-Fraire, T., Dzul, A., Cortés-Martínez, F., and Giernacki, W., "Real-time Implementation and Flight Tests, Using Linear and Non-linear Controllers for a Fixed-Wing Miniature Aerial Vehicle (MAV)", *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 16, No. 1, pp. 392-396, 2018.
- [3] Saberi Tavakkoli, M., "Modeling and Simulation of a Ballistic Launch Vehicle in ECEF and Navigation Coordinate Systems", *Journal of Technology in Aerospace Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 17-26, 2017.
- [4] Azimov, D. and Allen, J., "Analytical Model and Control Solutions for Unmanned Aerial Vehicle Maneuvers in a Vertical Plane", *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 91, No's. 3-4, 2018, pp. 725-733.
- [5] Mazare, M., davoodi, E., Taghizadeh, and M., pourgholi, M., "Optimal Control Based on Minimum-Energy Trajectory Planning of a Quadrotor", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 52, No. 5, pp. 1-3, 2019.
- [6] Babaei, A. and Setayandeh, S., "Design of Nonlinear Optimal Guidance Law for High Maneuver Targets Based on State Dependent Riccati Equation", *Aerospace Knowledge and Technology Journal*, Vol. 6, No. 1, pp. 93-107., 2017
- [7] Levin, J.M., Paranjape, A.A., and Nahon, M., "Agile Maneuvering with a Small Fixed-Wing Unmanned

حایز اهمیت و میزان توجه طراح را به هر یک از معیارهای طراحی و اولویت‌بندی آنها مشخص می‌کند.



شکل (۶): سرعت جسم برای ضرایب وزنی حالت مختلف.



شکل (۷): مصرف سوخت بهینه برای ضرایب وزنی حالت مختلف.

## نتیجه گیری

در این مقاله، کنترل بهینه یک وسیله هوایی با موتور پیشران هوازی با لحاظ دینامیک کامل سیستم و بازخورد سرعت جسم پرنده مورد مطالعه قرار گرفت. مدل ریاضی موتور پیشران ارایه و با استخراج معادلات حاکم بر موتور رمجت، رابطه نیروی پیشران و مصرف سوخت موتور بدست آمد. همچنین، معادلات غیرخطی موتور رمجت و دینامیک جسم پرنده ترکیب شده و معادلات در فضای حالت ارایه گردید. از روش کنترل بهینه برای کنترل مصرف سوخت وسیله هوایی با موتور هوازی استفاده و روابط بهینگی ارایه شد. با حل معادلات بهینگی، شبیه‌سازی‌های متنوعی برای کنترل بهینه جسم پرنده با موتور رمجت و با فیدبک سرعت جسم پرنده ارایه گردید. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که هر چقدر شرایط اولیه سرعت از شرایط مطلوب نهایی فاصله داشته باشد، زمان مورد نیاز برای

- [22] Marsh, B.W., "Introduction to the Analysis of Supersonic Ramjet Power Plants", *Journal of Jet Propulsion*, Vol. 24, No. 3, pp. 155-161, 1954.
- [23] Li, H., Si, Y., Wu, L., and Hu, X., "Fault-Tolerant Output Tracking Control For a Flexible Air-breathing Hypersonic Vehicle", *Systems and Control in Aeronautics and Astronautics (ISSCAA)*, Harbin, China, 2010.
- [24] Groves, K., Serrani, A., Yurkovich, S., and Bolender, M., "Anti-Windup Control for an Air-breathing Hypersonic Vehicle Model", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Keystone, Colorado, USA, 2006.
- [25] McRuer, D.T., Graham, D., and Ashkenas, I., *Aircraft Dynamics and Automatic Control*, Princeton University Press, Princeton, USA, 2014.
- [26] Blakelock, J.H., *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1991.
- [27] Kirk, D.E., *Optimal Control Theory: An Introduction*. Courier Corporation, Dover, New York, USA, 2012.
- Aerial Vehicle", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 116, pp. 148-161, 2019.
- [8] Nazemizadeh, M., Rahimi, H.N., and Khoiy, K.A., "Trajectory Planning of Mobile Robots Using Indirect Solution of Optimal Control Method in Generalized Point-to-Point Task", *Frontiers of Mechanical Engineering*, Vol. 7, No. 1, pp. 23-28, 2012.
- [9] Nazemizadeh, M. and Nohooji, H.R., "An Analysis of the Finite Element Method Applied on Dynamic Motion and Maximum Payload Planning of Flexible Manipulators", *Transactions of FAMENA*, Vol. 39, No. 4, pp. 15-22, 2016.
- [10] Korayem, M.H., Nazemizadeh, M., and Nohooji, H.R., "Optimal Point-to-Point Motion Planning of Non-holonomic Mobile Robots in the Presence of Multiple Obstacles", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 36, No. 1, pp. 221-232, 2014.
- [11] Nekoo, S.R., "Non-linear Closed Loop Optimal Control: A Modified State-dependent Riccati Equation", *ISA Transactions*, Vol. 52, No. 2, pp. 285-290, 2013.
- [12] Geranmehr, B. and Nekoo, S.R., "Non-linear Suboptimal Control of Fully Coupled Non-affine Six-DOF Autonomous Underwater Vehicle, Using the State-Dependent Riccati Equation", *Ocean Engineering*, Vol. 96, No. 1, pp. 248-257, 2015.
- [13] Mirzaeinejad, H. and Shafei, A.M., "Modeling and Trajectory Tracking Control of a Two-Wheeled Mobile Robot: Gibbs-Appell and Prediction-Based Approaches", *Robotica*, Vol. 36, No. 10, pp. 1551-157, 2018.
- [14] Mattingly, J.D. and Von Ohain, H., *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*, Reston Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Tata McGraw- Hill, New York, USA, 2006.
- [15] Küchemann, D. and Weber, J., *Aerodynamics of propulsion*, McGraw-Hill, Vol. 2, 1953.
- [16] Fry, R.S., "A Century of Ramjet Propulsion Technology Evolution", *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 20, No. 1, pp. 27-58, 2004.
- [17] Waltrup, P.J., White, M. E., Zarlingo, F., and Gravlin, E.S., "History of Ramjet and Scramjet Propulsion Development for US Navy Missiles", *Johns Hopkins APL Technical Digest*, Vol. 18, No. 2, pp. 235, 1997.
- [18] Hewitt, P.W., Waltz, B., and Vandiviere, S., "Ramjet Tactical Missile Propulsion Status", *AIAA 2002 Missile Sciences Conference [Classified and Unclassified Documents]*, 5-7 November, 2002 2002.
- [19] Waltrup, P.J., White, M. E., Zarlingo, F., and Gravlin, E.S., "History of US Navy Ramjet, Scramjet, and Mixed-Cycle Propulsion Development", *Journal of propulsion and power*, Vol. 18, No. 1, pp. 14-27, 2002.
- [20] LeMoyné, R., "Fundamental Analysis of a Tandem LH2-LOX Rocket-Ramjet Propulsion System", *AIAA SPACE 2009 Conference & Exposition*, pp. 6658, Pasadena, California, USA, 2009.
- [21] Rudnuck, Ph., "Momentum Relations in Propulsive Ducts", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 14, No. 9, pp. 540-54, 1947.

## پیوست

### دینامیک وسیله هوابی

در این بخش به دینامیک انتقالی و دورانی یک پرنده پرداخته می‌شود. در حالت کلی برای بیان دینامیک یک وسیله پرنده، دستگاه مختصات بدنی متصل به این جسم در نظر گرفته می‌شود [۲۵]. محور طولی  $x$  دستگاه بدنی در امتداد وتر طولی جسم پرنده، محور  $z$  عمود بر آن و در جهت قائم و محور  $y$  در راستای لغزش وسیله پرنده است. بردارهای  $i, j, k$  نیز در راستای محورهای دستگاه بدنی در نظر گرفته می‌شود. در این حالت فرض می‌کنیم که دستگاه بدنی متصل به وسیله پرنده دارای سرعت خطی  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  و در حال دوران با سرعت زاویه‌ای مطلق  $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$  نسبت به دستگاه مرجع ساکن است. در روابط بیان شده،  $u$  سرعت حرکت طولی،  $v$  سرعت حرکت جانبی،  $w$  سرعت حرکت قائم،  $p$  سرعت زاویه‌ای غلت،  $q$  سرعت زاویه‌ای فراز و  $r$  سرعت زاویه‌ای سمت است. همچنین، نیروهای خارجی وارد بر جسم برابر با  $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، معادلات دینامیک حرکت انتقالی وسیله پرنده عبارتست از [۲۵]:

$$\begin{cases} F_x = m(\dot{u} + qw - rv), \\ F_y = m(\dot{v} + ru - pw), \\ F_z = m(\dot{w} + pv - qu). \end{cases} \quad (9)$$

1. Roll  
2. Pitch  
3. Yaw



کنترل بهینه وضعیت وسیله هوایی با در نظر گرفتن مدل دینامیکی موتورپیشران و بازخورد سرعت (یادداشت فنی)

حالت معادلات دینامیک حرکت زاویه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود [۲۵]:

$$\begin{cases} L = I_{xx}\dot{p} - I_{xz}(\dot{r} + pq) + (I_{zz} - I_{yy})qr, \\ M = I_{yy}\dot{q} + I_{xz}(p^2 - r^2) + (I_{xx} - I_{zz})pr, \\ N = I_{zz}\dot{r} + I_{xz}(qr - \dot{p}) + (I_{yy} - I_{xx})pq. \end{cases} \quad (11)$$

از طرفی، برای بیان معادلات حرکت دورانی وسیله پرنده در فضا، از رابطه اویلر استفاده می‌شود. چنانچه گشتاورهای وارد بر وسیله پرنده در دستگاه مختصات بدنی متصل به جسم برابر با  $\sum \vec{M} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$  نشان داده شود، معادلات حرکت زاویه‌ای در جسم برابر است با [۲۵]:

$$\begin{cases} L = \dot{H}_x + qH_z - rH_y, \\ M = \dot{H}_y + rH_x - pH_z, \\ N = \dot{H}_z + pH_y - qH_x, \end{cases} \quad (10)$$

که در آنها، تکانه‌های زاویه‌ای به صورت  $H_y = -I_{xy}p + I_{yy}q - I_{yz}r$ ،  $H_x = I_{xx}p - I_{xy}q - I_{xz}r$  و  $H_z = -I_{xz}p - I_{yz}q - I_{zz}r$  تعریف می‌شود. اغلب اجسام پرنده و هواپیماها نسبت به صفحه  $xz$  تقارن دارند و در این

